Prirodzené čísla v ZFC

29. septembra 2012

Peanove axiómy

Definícia

Nech N je množina, 0 je nejaký prvok N a S je zobrazenie definované na N. Hovoríme, že trojica $(N, 0, S)$ spĺňa *Peanove axiómy,* ak platí:

(P1) $0 \in N$;

(P2) Ak $n \in N$, tak aj $S(n) \in N$.

(P3) Ak $n \in N$, tak $S(n) \neq 0$.

(P4) Ak $m, n \in N$ a $S(m) = S(n)$, tak $m = n$.

(P5) Ak $A \subseteq N$ je podmnožina množiny N taká, že $0 \in A$ a pre každé $n \in A$ aj $S(n) \in A$, tak $A = N$.

Induktívne množiny

Axióma X (Axióma nekonečnej množiny)

$$(\exists A)[\emptyset \in A \wedge (x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)]$$

Definícia

Množinu, ktorá spĺňa podmienku

$$\emptyset \in A \wedge x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A$$

budeme nazývať *induktívna množina*.

Definícia množiny $\mathbb{N}$

Definícia

Množina prirodzených čísel $\mathbb{N}$ je taká induktívna množina, že pre každú induktívnu množinu B platí $\mathbb{N} \subseteq B$.
Prvky tejto množiny nazývame *prirodzené čísla.*
Pre každé prirodzené číslo n budeme $S(n) = n \cup \{n\}$ nazývať *nasledovníkom* čísla n.

Definícia množiny $\mathbb{N}$

Lema

Prienik ľubovoľného neprázdneho systému induktívnych množín je induktívna množina.

Tvrdenie

Existuje práve jedna množina $\mathbb{N}$ taká, že $\mathbb{N}$ je induktívna a pre každú induktívnu množinu platí $\mathbb{N} \subseteq B$.

Definícia množiny $\mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset, \\
1 &= 0 \cup \{0\} = \{0\}, \\
2 &= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}, \\
3 &= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}, \dots
\end{aligned}
$$

$$0, 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{N}$$

Indukcia na $\mathbb{N}$

Veta (Indukcia na množine prirodzených čísel)

Nech $A \subseteq \mathbb{N}$ *je množina taká, že*

(i) $\emptyset \in A$;

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \in A \Rightarrow S(n) \in A$;

t.j. A *obsahuje* 0 *a s každým prirodzeným číslom obsahuje aj jeho nasledovníka.*

Potom platí $A = \mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ *spĺňa Peanove axiómy*

Lema

Pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n, k *platí*

(i) $n \notin n$;

(ii) $n = \emptyset \vee (\exists n_1 \in \mathbb{N}) n = S(n_1)$

(iii) $n \subseteq \mathbb{N}$;

(iv) $m \in n \Rightarrow S(m) \subseteq n$;

(v) *Ak* $m \in n$ *a* $n \in k$, *tak* $m \in k$.

(vi) $m \subseteq n \Rightarrow m = n \vee m \in n$;

(vii) $n = \emptyset \vee \emptyset \in n$.

$\mathbb{N}$ *splĺňa Peanove axiómy*

Dôsledok

Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ platí:

(i) $m \subsetneq n \Leftrightarrow m \in n$.

(ii) $m \in n \Rightarrow S(m) \in S(n)$.

Tvrdenie

Pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n platí

$$S(m) = S(n) \qquad \Rightarrow \qquad m = n.$$

Teda $(\mathbb{N}, \emptyset, S)$ splĺňa Peanove axiómy.

Definícia usporiadania

Definícia

Na množine $\mathbb{N}$ definujeme reláciu $<$ tak, že pre $m, n \in \mathbb{N}$

$$m < m \Leftrightarrow m \in n.$$

Reláciu $\leq$ zavedieme tak, že

$$m \leq n \Leftrightarrow m = n \vee m < n.$$

Definícia usporiadania

$$m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n \tag{1}$$

$$m < n \Leftrightarrow m \in n \Leftrightarrow m \subsetneqq n. \tag{2}$$

Už máme dokázané, že $(\mathbb{N}, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina.

Linearita a dobrota

Tvrdenie

Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$m \in n \vee m = n \vee n \in m.$$

Tvrdenie

Množina $(\mathbb{N}, \leq)$ je dobre usporiadaná množina.