A

1. Zistite, či zložený výrok $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)]$ je tautológia. (8 bodov)
2. Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ sú zobrazenia také, že $g \circ f = id_X$. Dokážte, že f je injekcia. (8 bodov)
3. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A a $\{B_i; i \in I\}$ platí $A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$. (8 bodov)
4. Vypočítajte kardinalitu množiny $\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. (8 bodov)
5. Dokážte $\aleph_0 \cdot (\aleph_0^{\aleph_0}) \cdot (\aleph_0^{(\aleph_0^{\aleph_0})}) = 2^{\mathfrak{c}}$. (8 bodov)

Pri počítaní kardinality môžete využívať vzťahy $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, $\aleph_0 = \aleph_0.\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$ ako aj všetky identity, o ktorých sme dokázali na prednáške, že platia pre všetky kardinálne čísla. Ak budete potrebovať nejaké ďalšie pomocné vzťahy, treba ich dokázať. Výsledok pri otázkach o kardinalite sa očakáva v tvare $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$, a pod. T.j. nenechávajte tam nejaké nedokončené výrazy ako $\aleph_0.\mathfrak{c}$ a pod.

B

1. Zistite, či zložený výrok $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$ je tautológia. (8 bodov)
2. Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ sú zobrazenia také, že $g \circ f = id_X$. Dokážte, že g je surjekcia. (8 bodov)
3. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A a $\{B_i; i \in I\}$ platí $A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$. (8 bodov)
4. Vypočítajte kardinalitu množiny $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ (8 bodov)
5. Dokážte $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \cdot \aleph_0^{\aleph_0}$. (8 bodov)

Pri počítaní kardinality môžete využívať vzťahy $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, $\aleph_0 = \aleph_0.\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$ ako aj všetky identity, o ktorých sme dokázali na prednáške, že platia pre všetky kardinálne čísla. Ak budete potrebovať nejaké ďalšie pomocné vzťahy, treba ich dokázať. Výsledok pri otázkach o kardinalite sa očakáva v tvare $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$, a pod. T.j. nenechávajte tam nejaké nedokončené výrazy ako $\aleph_0.\mathfrak{c}$ a pod.

Riešenia niektorých úloh

A2

Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ sú zobrazenia také, že $g \circ f = id_X$. Dokážte, že f je injekcia.
Riešenie. $f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow x = y$

A3

Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A a $\{B_i; i \in I\}$ platí $A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$.
Riešenie.

$x \in A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow x \in A \wedge (\exists i \in I)(x \in B_i) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (\exists i \in I)(x \in A \wedge x \in B_i) \Leftrightarrow (\exists i \in I)(x \in A \cap B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$

Ekvivalencia označená $(*)$ platí vďaka tomu, že pre ľubovoľný výrok p a výrokovú funkciu $Q(x)$ platí $p \wedge (\exists I)Q(i) \Leftrightarrow (\exists i)(p \wedge Q(i))$. (Stačí si všimnúť, že platnosť výroku p nijako nezávisí od i.)

A4

Vypočítajte kardinalitu množiny $\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.
Riešenie. $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|\cdot|\mathbb{N}|} = \mathfrak{c}^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

A5

Dokážte $\aleph_0 \cdot (\aleph_0^{\aleph_0}) \cdot (\aleph_0^{(\aleph_0^{\aleph_0})}) = 2^{\mathfrak{c}}$.

- Vypočítajme najprv $\aleph_0^{\aleph_0}$. Platí $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$. Súčasne aj $\aleph_0^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Dokázali sme obe nerovnosti, a teda $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

- Ďalej chceme zrátať $\aleph_0^{(\aleph_0^{\aleph_0})} = \aleph_0^{\mathfrak{c}}$. Máme $2 \leq \aleph_0$, a teda aj $2^{\mathfrak{c}} \leq \aleph_0^{\mathfrak{c}}$. Obrátene $\aleph_0^{\mathfrak{c}} \leq 2^{\aleph_0\cdot\mathfrak{c}} \stackrel{(\triangle)}{=} 2^{\mathfrak{c}}$. Opäť máme obe nerovnosti, čiže $\aleph_0^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.
  - V predchádzajúcom výpočte v $(\triangle)$ sme využili $\mathfrak{c} = \aleph_0 \cdot \mathfrak{c}$. Ukážme, že táto rovnosť skutočne platí. Nerovnosť $\mathfrak{c} = 1\cdot\mathfrak{c} \leq \aleph_0\cdot\mathfrak{c}$ je naozaj jasná. Súčasne máme $\aleph_0\cdot\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Celkovo máme teda nerovnosti $\mathfrak{c} \leq \aleph_0\cdot\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Z nich vyplýva
  $$\mathfrak{c} = \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} \tag{1}$$

- Z doteraz vyrátaných vecí už máme $\aleph_0 \cdot (\aleph_0^{\aleph_0}) = \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} \stackrel{(1)}{=} \mathfrak{c}$.

- Ďalej dostávame $\aleph_0 \cdot (\aleph_0^{\aleph_0}) \cdot (\aleph_0^{(\aleph_0^{\aleph_0})}) = \mathfrak{c} \cdot (\aleph_0^{(\aleph_0^{\aleph_0})}) = \mathfrak{c}\cdot 2^{\mathfrak{c}}$. Určite platí $2^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{c}\cdot 2^{\mathfrak{c}}$. Súčasne máme $\mathfrak{c}\cdot 2^{\mathfrak{c}} \leq 2^{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}} \stackrel{(1)}{=} 2^{\mathfrak{c}}$. Dostali sme obe nerovnosti a teda
  $$\mathfrak{c}\cdot 2^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}},$$
  čo je aj celkový výsledok.

B2

Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ sú zobrazenia také, že $g \circ f = id_X$. Dokážte, že g je surjekcia.
Riešenie. Aby sme ukázali, že g je surjektívne, stačí ukázať, že každý prvok $x \in X$ má nejaký vzor.

Nech $x \in X$. Potom $g(f(x)) = x$, čiže $f(x)$ je prvok množiny Y, ktorý sa zobrazí zobrazením g na x.

Čiže každý prvok z X (z oboru hodnôt) má vzor a g je surjektívne.

B5

Dokážte $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \cdot \aleph_0^{\aleph_0}$.
Riešenie.

- Platí $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0\cdot\mathfrak{c}}$. Ak sa nám podarí ukázať, že $\aleph_0.\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, tak máme dokázané, že ľavá strana je rovná $2^{\mathfrak{c}}$.

- Pokúsme sa teda ukázať platnosť rovnosti $\aleph_0\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Máme nerovnosti $\mathfrak{c} \leq \aleph_0\cdot\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Ukázali sme $\mathfrak{c} \leq \aleph_0\cdot\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}$, a teda musí platiť rovnosť.

- Pozrime sa teraz na výrazy na pravej strane. Najprv sa pokúsme vyrátať, čomu sa rovná $\aleph_0^{\aleph_0}$. Z nerovností $2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ dostaneme $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

- Ďalej pre $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$ máme $2^{\mathfrak{c}} \le \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \le (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0\cdot\mathfrak{c}} \overset{(\diamondsuit)}{=} 2^{\mathfrak{c}}$. (V rovnosti označenej $(\diamondsuit)$ sme opäť využili rovnosť $\aleph_0\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$ ukázanú v druhej časti dôkazu.) Z uvedených nerovností vyplýva $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

- Pre pravú stranu dostávame teda vyjadrenie $2^{\aleph_0}\cdot 2^{\mathfrak{c}}$, čo je presne ľavá strana. (A v prvej časti dôkazu sme o tomto kardinálnom čísel ukázali, že sa rovná $2^{\mathfrak{c}}$.)

Komentáre, časté chyby

Zobrazenia, surjekcie, injekcie

To, že $g\circ f = id_X$ neznamená, že $g = f^{-1}$. (Na to by muselo platiť aj $f\circ g = id_X$.) Pozri aj tvrdenie 3.2.14 v poznámkach. (Na prednáške sme viackrát spomenuli to, že zobrazenie je surjekcia $\Leftrightarrow$ má **pravé** inverzné zobrazenie a hovorili sme aj o tom, kde sa v dôkaze využíva axióma výberu. Tá sa však používa v dôkaze tej ťažšej implikácie, nie tejto, ktorá bola na písomke.)

Množinové identity

Snažiť sa dokazovať identity ako $A\cap(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$ indukciou na počet prvkov množiny I alebo zápisom tvaru $A\cap(B_1\dots B_k) = (A\cap B_1)\dots(A\cap B_k)$ sa dá jedine v prípade, že I je konečná. Úloha bola dokázať túto identitu pre ľubovoľnú množinu I.

Niektoré zdôvodnenia, prečo je výrok s kvantifikátormi pravdivý, neboli dobre. Keďže som ale výslovne povedal, že ich nepožadujem, tak som uznal za plný počet riešenie, kde ste dokazovanú identitu správne previedli na výrok s kvantifikátormi. (Bez ohľadu na to, či ste tento výrok nejako zdôvodňovali a či bolo vaše zdôvodnenie správne.)

Výpočty kardinalít

Občas sa vyskytlo $<$ namiesto $\le$. Napríklad zdôvodnenie $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} \Rightarrow \aleph_0^{\aleph_0} < (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ zjavne nie je správne. (Všimnite si, že ak by to platilo, tak $2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0} < (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, čiže dostávame $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_0}$, čo určite nie je pravda.)

Takýto argument: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} \Rightarrow \aleph_0^{\aleph_0} \le (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ už je v poriadku.

Platí $a^b.a^c = a^{b+c}$, nie $a^b.a^c = a^{b.c}$.

Ukázali sme si, že $a^b \le 2^{ab}$, rovnosť $a^b = 2^{ab}$ však platiť nemusí. (Napríklad pre $b=1$, tak z Cantorovej vety máme ostrú nerovnosť $a^b = a < 2^a = 2^{ab}$.)