Zadania

1. (1 bod) Dokážte, že alternujúca grupa A_n je jedinou podgrupou S_n indexu 2. Nájdite príklad grupy, ktorá má viac než jednu podgrupu indexu 2.

2. (1 bod) Nech $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ a platí $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$; a, b, c, d sú navzájom rôzne celé čísla. Prečo neexistuje $k \in \mathbb{Z}$ také, že $f(k) = 8$?

3. (1 bod) Nájdite všetky reálne čísla a pre ktoré $f(x) \mid g(x)$ (nad $\mathbb{R}$), kde $f(x) = x^2 + ax + 1$ a $g(x) = x^{20} + ax^{10} + 1$.

4. (1,5 bodu) Nech F je pole. Dokážte:
   a) Pre ľubovoľné $f, g, h \in F[X]$ platí $g(x) - h(x) \mid f(g(x)) - f(h(x))$.
   b) Pre ľubovoľné $f, g \in F[X]$ platí $f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow f(x) - g(x) \mid f(f(x)) - g(g(x))$.
   c) Nech $f(x) \in F[x]$. Položme $f_1(x) = f(x)$ a indukciou definujme $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. Ďalej nech $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Potom $g_1(x) \mid g_n(x)$ pre všetky $n = 1, 2, \ldots$

5. (1 bod) Čomu sa rovná $(x^m - 1, x^n - 1)$? Pokúste sa tento polynóm vyjadriť pomocou (m, n). Svoje tvrdenie dokážte.

6. (1 bod) Dokážte, že pre každý polynóm z $\mathbb{C}[x]$ existuje jeho nenulový násobok taký, že všetky exponenty v tomto polynóme (ktoré tam vystupujú s nenulovým koeficientom) sú násobky 2007. Inak povedané, pre každé $f(x)$ existuje $g(x)$ tak, že $f(x) \mid g(x^{2007})$.

7. (0,5 bodu) Pre aké n platí $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 \mid x^{2n-2} + x^{2n-4} + \ldots + x^2 + 1$ (v $\mathbb{Q}[x]$)?