Polynomické funkcie

A je *komutatívny* okruh.

$A\langle s\rangle$ = polynomické funkcie z A do A (tvoria okruh)
A^A = všetky funkcie z A do A
$A[u] = [A \cup \{u\}]$ = podokruh generovaný prvkom u a podokruhom A

1. Ak A je komutatívny okruh (s jednotkou)/obor integrity/teleso/pole a $M \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina, zistite, či A^M (so sčitovaním a násobením definovaným prirodzeným spôsobom) je komutatívny okruh/obor integrity/teleso/pole a či má jednotku. Podobná úloha pre $A\langle s\rangle$. (Množina $A\langle s\rangle$ je podmnožinou A^A.)

2. Existuje pole F také, že $F\langle s\rangle$ nie je obor integrity?

3. Ak sa dve polynomické funkcie z $\mathbb{R}\langle s\rangle$ rovnajú, musia sa rovnať ich koeficienty. Dá sa použiť rovnaký argument pre polynómy nad poľom $\mathbb{Z}_p$ (prípadne nad iným konečným poľom)? (Hint: Možno pomôže Vandermondov determinant. Iný hint: V prípade reálnych čísel by mohlo pomôcť aj derivovanie. Posledný hint: Alebo to skúste nejako celkom inak.)

4. Ak p je prvočíslo, nájdite v $Z_p\langle s\rangle$ 2 polynomické funkcie, ktoré sa rovnajú, ale ich postupnosti koeficientov sa nerovnajú.

5. Nech B je komutatívny okruh s jednotkou a nech A je podokruh B, pričom $1 \in A$. Ďalej nech $u \in B$. Potom $A[u] = [A \cup \{u\}] = \{f \in B; f = a_0 + a_1 u + \ldots + a_n u^n$ pre nejaké $a_0, \ldots, a_n \in A\}$. Načo potrebujeme jednotku? Ako by vyzeralo tvrdenie, keby B nemalo 1? Načo potrebujeme dobrá komutatívnosť?

6. Nech A je komutatívny okruh, ktorý nemá jednotku. Obsahuje potom $A\langle s\rangle$ identickú funkciu?

7. Prečo potrebujeme pri definícii $A\langle s\rangle$ komutatívnosť A. (Ako by vyzeral súčin polynomických funkcií?)

8. Pre ktoré prvočísla p sa polynomické funkcie $x^6 + 2x^2 + x$ a $x^9 + 8x^3 + x$ ako funkcie $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ rovnajú.

9. Nájdite izomorfizmus okruhov $\mathbb{Z}_2\langle s\rangle$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.