Polynómy

$\sqrt{2}$ je algebraický prvok nad $\mathbb{Q}$
π a e sú transcendentné nad $\mathbb{Q}$

1. Nech A je obor integrity, x je neurčitá nad A a $a(x) \in A[x] \setminus A$. Je $a(x)$ neurčitá nad A?

2. Nech $x \in \mathbb{R}$. Dokážte, že x je transcendentný nad $\mathbb{Q}$ práve vtedy, keď x je transcendentný nad $\mathbb{Z}$.

3. Koľko je polynómov stupňa k v $Z_2[x]$.

4. Popíšte ideál v $\mathbb{Z}_2[s]$ taký, že $\mathbb{Z}_2[s]/I \cong Z_2\langle s\rangle$.

5. Nech $f(x) = a_0 + a_1x + x^3$ a $g(x) = 1 + b_1x + x^2$. Kedy $g(x) \mid f(x)$ a) nad $\mathbb{Q}$; b) nad $\mathbb{Z}_2$?

6. Nech F je pole a $p(x) \in F[x]$. Dokážte, že $q(x) \in F[x]$ s vlastnosťou $p(x)q(x) = 1$ existuje práve vtedy, keď $p(x)$ má stupeň 1.

7. Ak A je obor integrity, tak aj $A[x]$ je obor integrity. Je $A[x]$ pole?

8. Dokážte, že neexistuje homomorfizmus okruhov $\eta\colon Z_2\langle x\rangle \to Z_2[x]$ taký, že $\hat{0}\eta = 0$, $\hat{1}\eta = 1$, $id\eta = x$. (Ako $\hat{a}$ označujeme konštantnú funkciu.)

9. Ak I je ideál okruhu R a J je ideál okruhu $R[x]$ generovaný množinou I (t.j. je to množina všetkých polynómov s koeficientami z I), tak
$$R[x]/J \cong (R/I)[x].$$

Najväčší spoločný deliteľ polynómov

Najväčší spoločný deliteľ polynómov f a g je polynóm d taký, že

(i) $d(x) \mid f(x) \wedge d(x) \mid g(x)$,

(ii) $h(x) \mid f(x) \wedge h(x) \mid g(x) \Rightarrow h(x) \mid d(x)$.

Polynóm d je týmito dvomi podmienkami určený jednoznačne až na asociovanosť (teda až na vynásobenie konštantou). Preto si zo všetkých najväčších spoločných deliteľov f a g môžeme vybrať ten, ktorý je normovaný (vedúci koeficient je 1) a ten budeme označovať (f, g).

Ak $d(x) = (f(x), g(x))$, tak existujú polynómy $u(x)$ a $v(x)$ také, že $u(x).f(x)+v(x).g(x) = d(x)$. Tieto polynómy môžeme určiť pomocou Euklidovho algoritmu (t.j. postupným delením so zvyškom).

1. Vypočítajte $d(x) = (f(x), g(x))$ a vyjadrite ho v tvare $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.
   a) $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$, $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$;
   b) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$;
   c) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x - 9$, $g(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 7$;
   e) $f(x) = x^8 - 1$, $g(x) = x^5 - 1$

2. Dokážte, že najmenší spoločný násobok dvoch polynómov je určený jednoznačne až na asociovanosť. Ako $[f, g]$ označme normovaný najmenší spoločný násobok dvoch polynómov f, g. Dokážte, že $[f, g] = \frac{fg}{a_n b_m (f,g)}$, kde a_n a b_m sú vedúce koeficienty polynómov f a g.

1. a) $u(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, $v(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}$, $d(x) = x + \frac{2}{3}$
b) $u(x) = -\frac{x-1}{3}$, $v(x) = \frac{2x^2-2x-3}{3}$, $d(x) = x - 1$
c) $d(x) = 1$, $u(x) = 1/30(2x^2 + 5x - 1)$, $v(x) = -1/30(2x^3 + 9x^2 + 7x + 3)$

Delenie polynómov, Hornerova schéma

1. Dokážte, že zvyšok polynómu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 0$ po delení $x - b$ je práve $f(b)$.

2. Vypočítajte podiel a zvyšok:
   a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ a $g(x) = x - 1$
   b) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$ a $g(x) = x + 3$
   c) $f(x) = 4x^3 + x^2$ a $g(x) = x + 1 + i$
   d) $f(x) = x^3 - x^2 - x$ a $g(x) = x - 1 + 2i$
   e) $f(x) = x^{82} + 1$, $g(x) = x^2 + 1$
   f) $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x + 2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
   g) $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 8x - 6$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 3$
   h) $f(x) = x^5 - 3ix^3 - 2ix^2 - 6$, $g(x) = x^2 - 2i$

3. Vypočítajte $f(c)$:
   a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $c = 4$
   b) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $c = -2 - i$
   c) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $c = -1$
   d) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$, $c = 2$
   e) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i$, $c = -i$
   f) $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i$, $c = -1 + 2i$

4. Pomocou Hornerovej schémy vyjadriť:
   a) $f(x + 3)$ pre $f(x) = x^4 - x^3 + 1$
   b) $(x - 2)^4 + 4(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 10(x - 2) + 20$

5. Vydeľte so zvyškom polynóm $f(x)$ polynómom $g(x)$ nad daným poľom.
   a) $f(x) = 6x^6 + 4x^5 + 2x^3 + 4x^2 + 5$, $g(x) = x + 3$ v $\mathbb{Z}_7$,
   b) $f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 2$ v $\mathbb{Z}_5$,
   c) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + 2x$ v $\mathbb{Z}_3$.

Deliteľnosť polynómov

1. Dokážte, že $|$ je čiastočné usporiadanie na $F[x]$. Má toto čiastočné usporiadanie najväčší prvok, najmenší prvok, minimálne a maximálne prvky?

2. Dokážte, že $|$ je čiastočné usporiadanie na množine $\mathbb{Z}$ (na množine $\mathbb{N}_0$). Má toto čiastočné usporiadanie najväčší prvok, najmenší prvok, minimálne a maximálne prvky?

3. Dokážte, že $\sim$ je relácia ekvivalencie na $F[x]$. Platí $f(x) \sim g(x) \wedge h(x) \sim j(x) \Rightarrow f(x).h(x) \sim g(x).j(x)$? Platí to pre sčitovanie?

Rozklad polynómu

Pracujeme len s polynómami nad nejakým poľom F.

Ireducibilný polynóm je polynóm, ktorý nemá *netriviálne delitele.* (Teda všetky jeho delitele sú buď konštanty alebo polynómy asociované s $f(x)$.)

Každý polynóm sa dá rozložiť na súčin ireducibilných polynómov. Tento rozklad je jednoznačný až na poradie a asociovanosť.

1. Nech F_1 je nadpole poľa F a $f \in F[x]$. Dokážte, že ak f je ireducibilný nad poľom F_1, tak je ireducibilný aj nad poľom F.

2. Dokážte, že $x^4 + 2$ je ireducibilný nad $\mathbb{Z}_5$.

3. Nájdite všetky ireducibilné polynómy nad $\mathbb{Z}_2$ stupňov 2,3,4.

4. Nájdite rozklad $f(x)$ na ireducibilné polynómy v $F[x]$.
   a) $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 6,\ F = \mathbb{Z}_7$
   b) $f(x) = x^4 - 1,\ F = \mathbb{Z}_{11}$
   c) $f(x) = x^4 - 1,\ F = \mathbb{Z}_{13}$

5. Ako môžeme pomocou rozkladu na ireducibilné polynómy nájsť nsd?

Korene polynómov

Pracujeme s polynómami z $F[x]$, kde F je pole. Ako korene môžeme uvažovať aj prvky z nejakého nadpoľa $F_1 \supseteq F$.

$c \in F_1$ je koreňom polynómu $f(x) \Leftrightarrow f(c) = 0 \Leftrightarrow x - c \mid f(x)$

Pole F sa volá *algebraicky uzavreté,* ak každý polynóm z $F[x]$ má koreň v F.

Ak F je algebraicky uzavreté pole, tak každý polynóm sa v ňom dá rozložiť na súčin koreňových činiteľov – polynómov stupňa 1. V algebraicky uzavretom poli sú ireducibilné práve polynómy stupňa 1.

Ku každému poľu existuje algebraicky uzavreté nadpole. Pole komplexných čísel $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavreté.

1. Zjednodušiť polynóm $1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2.} + \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$.

2. Nech $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ je polynóm s celočíselnými koeficientami. Dokážte, že ak $a + b\sqrt{3}$ je koreň $f(x)$, tak aj $a - b\sqrt{3}$ je koreň $f(x)$. Dokážte, že podobné tvrdenie platí, ak c nahradíme ľubovoľným prirodzeným číslom, ktoré nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.

3. Dokážte, $x - 1 \mid f(x^n) \Rightarrow x^n - 1 \mid f(x^n)$.

4. Nájdite $f(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$ tak, aby stupeň f bol menší ako počet koreňov f.

5. Dokážte s využitím poznatkov o koreňoch polynómov, že $x^2+x+1 \mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ v $\mathbb{C}[x]$.