Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

1. Nech $(S, \cdot)$ je pologrupa, ktorá má pravú jednotku e (teda pre každé $a \in S$ platí $ae = a$) a pre každé $a \in S$ má rovnica $ax = e$ riešenie. Potom S je grupa.
2. Nech $(S, \cdot)$ je pologrupa, ktorá má pravú jednotku e (teda pre každé $a \in S$ platí $ae = a$) a pre každé $a \in S$ má rovnica $ax = e$ jediné riešenie. Potom S je grupa.

1. ???
2. Zo zadania vieme, že

$$ae = e \tag{1}$$ {2EQ1}

pre všetky $a \in S$ a pre každé $a \in S$ existuje (jednoznačne určené) $a' \in S$ také, že

$$aa' = e. \tag{2}$$ {2EQ2}

Potom platí

$$a(ea') = (ae)a' \overset{(1)}{=} aa' \overset{(1)}{=} e$$

a z jednoznačnosti v (2) potom dostaneme

$$ea' = a' \tag{3}$$ {2EQ3}

pre ľubovoľné a.

Keby sme vedeli, že každý prvok sa dá vyjadriť ako b' pre nejaké b, tak rovnosť (3) hovorí, že e je aj pravá jednotka. Skúsme upraviť výraz $aa'a''$.

$$aa'a'' = (aa')a'' \overset{(2)}{=} ea'' \overset{(3)}{=} a''$$
$$aa'a'' = a(a'a'') \overset{(2)}{=} ae \overset{(1)}{=} a$$

Dostali sme teda rovnosť

$$a = a'' \tag{4}$$ {2EQ4}

pre všetky $a \in a$, čiže platí

$$ae = ea = a$$

a e je (pravý aj ľavý) neutrálny prvok v S.

Ďalej vieme, že $a'a'' = e$ a $a = a''$, teda

$$aa' = a'a = e,$$

čiže a' je (pravý aj ľavý) inverzný prvok k a.