1 Permutácie

Pretože permutácie budete preberať na prednáške až neskôr, spomenieme si tu niektoré základné veci týkajúce sa permutácií.

Ak M je konečná množina, ľubovoľná bijekcia $\varphi\colon M \to M$ sa nazýva *permutácia.*

My budeme používať len množiny tvaru $\{1, 2, \dots, n\}$ (pretože prvky každej n-prvkovú množinu môžeme očíslovať číslami 1 až n, je to vlastne iba zjednodušenie označenia).

Permutácie množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ tvoria grupu, ktorú budeme označovať S_n.

Permutácie budeme zapisovať v tvare $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\varphi & 2\varphi & \dots & n\varphi \end{smallmatrix}\right)$.

Tým sa myslí to, že napríklad $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ je taká permutácia, že $1\varphi = 3$, $2\varphi = 1$ a $3\varphi = 2$.

Pod vynásobením 2 permutácií rozumieme skladanie zobrazení, t.j. napríklad

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Ak totiž označíme $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, tak $\varphi \circ \tau$ je zobrazenie, pre ktoré platí:
$1\varphi\tau = 2\tau = 3$,
$2\varphi\tau = 3\tau = 2$,
$3\varphi\tau = 1\tau = 1$.

Kuchársky návod: Pozrieme sa iba na dolné riadky v zápise permutácie. Čísla v prvej zátvorke nám povedia, v akom poradí máme napísať čísla z druhej zátvorky, aby sme dostali výsledok.

Na tomto príklade si môžeme všimnúť aj to, že skladanie permutácií nie je komutatívne

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right).$$

Grupa S_n je teda príkladom nekomutatívnej grupy.

Často sa používa namiesto $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ označenie (132) – pretože dolný riadok stačí na jednoznačné určenie permutácie, ak sa dohodneme, že v hornom riadku sú vždy čísla od 1 po n v prirodzenom poradí. Pretože my budeme používať označenie (123) pre cykly, ktoré o chvíľu zadefinujeme, dáme prednosť tomuto zdĺhavejšiemu zápisu.

1.1 Rozklad na súčin disjunktných cyklov

Nech $a_1, \dots, a_k$ sú nejaké čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Ako $(a_1, \dots, a_k)$ budeme označovať permutáciu, ktorá spĺňa $a_1\varphi = a_2, a_2\varphi = a_3, \dots a_{k-1}\varphi = a_k$ a $a_k\varphi = a_1$. Permutáciu takéhoto tvaru voláme *cyklus.*

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (124)$$

Každú permutáciu možno rozložiť na disjunktné cykly. Napríklad:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = (124)(35) = (35)(124)$$

Na predchádzajúcom príklade si tiež môžeme všimnúť, že disjunktné cykly komutujú.

Pomocou rozkladu na disjunktné cykly môžeme ľahko zistiť rád permutácie (ako prvku grupy permutácií S_n). Rád permutácie je najmenší spoločný násobok dĺžok disjunktných cyklov, na ktoré sa dá rozložiť. (Teda rád permutácie z predchádzajúceho príkladu je 6.)

1.2 Parita permutácie

Cykly dĺžky 2 nazývame *transpozície.* Pretože každý cyklus sa dá rozložiť na transpozície

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \ldots (a_1 a_n)$$

každú permutáciu možno rozložiť aj na súčin transpozícií. Podľa toho, či je počet týchto transpozícií párny alebo nepárny, hovoríme o *párnej* alebo *nepárnej* permutácii. (*Parita* permutácie je určená jednoznačne.)

Súčin 2 párnych permutácií je opäť párna permutácia, preto párne permutácie množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ tvoria grupu. Táto grupa sa označuje A_n a nazýva sa *alternujúca grupa.*

2 Úlohy

1. Dokážte, že cyklus dĺžky k je párna permutácie práve vtedy, keď k je nepárne.
2. Pre dané permutácie určte rád, paritu, a rozklad na disjunktné cykly:
   $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5\\ 2&3&4&5&1 \end{smallmatrix}\right)$, $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5\\ 2&1&4&5&3 \end{smallmatrix}\right)$, $\psi = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5\\ 3&2&1&5&4 \end{smallmatrix}\right)$.
   Ďalej vypočítajte permutácie $\varphi\tau\psi$, φ^{-1}, τ^{-1}, ψ^{-1}.
3. Zostavte tabuľku grupovej operácie pre grupu S_3.
4. Nájdite všetky podgrupy grupy S_3.
5. Dokážte, že grupa S_n je generovaná:
   a) Množinou všetkých transpozícií.
   b) Množinou transpozícií $\{(12), (13), \ldots, (1n)\}$.
6. Dokážte, že alternujúca grupa A_n je generovaná:
   a) Množinou všetkých cyklov (ijk) dĺžky 3.
   b) Množinou cyklov dĺžky 3 tvaru $(123), (124), \ldots, (12n)$.
7. [1] Dokážte, že grupa A_4 párnych permutácií 4-prvkovej množiny nemá žiadnu 6-prvkovú podgrupu. (Kontrapríklad ukazujúci, že neplatí obrátenie Lagrangeovej vety.)
8. Dokážte, že párne permutácie tvoria podgrupu S_n a že počet párnych a nepárnych permutácií v S_n je rovnaký.
9. Dokážte, že grupa symetrií trojuholníka je izomorfná grupe S_3.
10. Zostavte tabuľku grupy symetrií trojuholníka.
11. [2] Dokážte, že grupa všetkých rotácií (t.j. všetkých symetrií okrem rovinných súmerností) kocky je izomorfná grupe S_4.
12. [3] Je grupa všetkých rotácií a zrkadlení (=rovinných súmerností) dvadsaťstena (ikosaédra) izomorfná niektorej z grúp S_5, A_5, A_6? [4]

[1] Prémia za 1 bod

[2] Prémia za 1 bod, ak určíte aspoň počet prvkov tejto grupy, je to 1/4 bodu.

[3] Prémia za 2 body. Určenie počtu prvkov = 1/2 bodu.

[4] Ak sami vymyslíte a dokážete ďalšiu vetu typu: (niektoré) symetrie pravidelného m-stena tvoria grupu izomorfnú s S_k (alebo A_k), uznám to ako prémiu za 1 bod.

3 Tabuľky niektorých grúp

Niektoré grupy budeme často používať ako kontrapríklady na rôzne otázky. Pri hľadaní kontrapríkladov je občas vhodné mať poruke tabuľku danej grupy.

Grupa S_3

Grupa permutácií množiny $\{1, 2, 3\}$.

	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$

Ak tie isté permutácie zapíšeme ako cykly (a identitu označíme id) dostaneme nasledujúcu tabuľku:

	id	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
id	id	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	id	(123)	(132)	(13)	(23)
(13)	(13)	(132)	id	(123)	(23)	(12)
(23)	(23)	(123)	(132)	id	(12)	(13)
(123)	(123)	(23)	(12)	(13)	(132)	id
(132)	(132)	(13)	(23)	(12)	id	(123)