Poznámky k prvej písomke

V príkladoch s rádmi nebolo jasné, či ste celkom rozumeli, prečo sa to robí tak, ako sa to robí. Všetci ste to samozrejme rátali správnym postupom – len som si nebol istý, či tomu rozumiete. Preto radšej ešte raz. Ak chcem ukázať, že dva prvky majú a a b rovnaký rád, tak mi stačí ukázať

$$a^n = e \qquad \Leftrightarrow \quad b^n = e$$

pre $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.[1] Potom totiž platí

$$\{n \in \mathbb{N}; n > 0, a^n = e\} = \{n \in \mathbb{N}; n > 0, b^n = e\}$$
$$\min\{n \in \mathbb{N}; n > 0, a^n = e\} = \min\{n \in \mathbb{N}; n > 0, b^n = e\}$$

Ľavá strana poslednej rovnosti je rád prvku a, pravá strana zasa rád b.

A2: Dokážte, že $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ s operáciou $*$ definovanou ako $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ tvorí grupu. (Hint: Možno jednoduchšie ako dokazovať to priamo z definície je ukázať, že táto štruktúra je izomorfná s nejakou známou grupou.)

Väčšinou ste to riešili tak, že ste priamo overovali asociatívnosť. Zoberme si bijektívne zobrazenie $\varphi\colon ((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), *) \to (\mathbb{C} \setminus 0, \cdot)$ definované ako

$$(a, b)\varphi = a + bi.$$

Všimnime si, že toto zobrazenie zachováva uvedené binárne operácie:

$$[(a, b) * (c, d)]\varphi = (ac - bd, ad + cb)\varphi = (ac - bd) + (ad + bc)i = (a + bi)(c + di) = (a, b)\varphi \cdot (c, d)\varphi$$

Z toho vyplýva, že binárna operácia * na $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ má presne tie isté vlastnosti ako násobenie na $C \setminus \{0\}$. Pretože vieme, že $(C \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa, tak aj $((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), *)$ je grupa.

[1] Takto ste to aj robili – túto poznámku sem píšem preto, že som si nie istý, či ste aj vedeli, prečo stačí dokázať toto.