1. Nech x a y sú prvky konečného rádu grupy G a nech $xy = yx$. Dokážte, že ak ich rády k a l sú nesúdeliteľné, tak rád prvku xy je kl. Dokážte, že existujú exponenty m a n, také, že rád prvku $x^m y^n$ je rovný $[k,l]$ (najmenší spoločný násobok rádov). Platia tieto tvrdenia aj ak x a y nekomutujú?

Zrejme $(xy)^{kl} = x^{kl}y^{kl} = e$. Treba ukázať, že kl je najmenšie číslo s touto vlastnosťou.

Ak
$$(xy)^n = x^n y^n = e,$$
tak máme $x^n = y^{-n}$. Potom
$$e = (x^n)^k = y^{-nk},$$
čiže $l \mid nk$. Pretože l a k sú nesúdeliteľné, z toho, že $l \mid nk$ už vyplýva $l \mid n$. Podobne sa dokáže $k \mid n$. Teda $kl \mid n$. Z toho, čo sme doteraz ukázali vyplýva, že $n = kl$.

Na dôkaz ďalšej časti úlohy (kde už nepredpokladáme, že k a l sú nesúdeliteľné) si stačí uvedomiť, že ak rád prvku x je k a $d \mid k$, tak rád x^d je $\frac{k}{d}$. Ak teda položíme $d = (k,l)$ a $m = d$ a $n = 1$, tak prvky x^d a $y^n = y$ majú rády $\frac{k}{d}$ a l. Pretože $(\frac{k}{d}, l) = 1$, môžeme použiť prvú časť úlohy a dostaneme, že rád prvku $x^d y^d$ je $\frac{kl}{(k,l)} = [k,l]$.

Kontrapríklad ukazujúci, že bez predpokladu $xy = yx$ toto tvrdenie nemusí platiť: $x = (14)$ a $y = (123)$. Rády týchto prvkov sú 2 a 3. Rád prvku $xy = (14)(123) = (1423)$ je $4 \neq 2.3$.

Tieto 2 prvky sú kontrapríkladom aj na druhú časť tvrdenia. Ak totiž zoberieme ľubovoľnú mocninu x, bude to niektorá z permutácií id alebo (14). Mocniny y sú (123), (132), id. Možné súčiny $x^m y^n$ sú (1423), (1432), (123), (132), (14) a id. V žiadnom prípade nedostaneme prvok rádu $[2,3] = 6$.

2. Nech x a y sú prvky konečného rádu grupy G a nech $xy = yx$. Dokážte, že ak $[x] \cap [y] = \{e\}$, čiže prienik podgrúp generovaných týmito prvkami je triviálna podgrupa, tak rád prvku xy je najmenší spoločný násobok rádov prvkov x a y.

Pretože $s = [k,n]$ je násobkom k aj l, je zrejmé, že $(xy)^s = x^s y^s = e$.

Ak platí $(xy)^n = e$, tak $x^n = y^{-n}$ je prvok, ktorý patrí súčasne do $[x]$ aj do $[y]$. Preto $x^n = y^{-n} = 1$, z čoho vyplýva $k \mid n$ a $l \mid n$, preto $s \mid n$. Vidíme, že s je najmenšie číslo s vlastnosťou, že $(xy)^s = e$.

Na 1 z cvičení som v zadaní napísal kl namiesto $[k,l]$. V takomto znení tvrdenie vety neplatí: ako kontrapríklad stačí zobrať $x = (1,0)$ a $y = (0,1)$ v $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Potom x má rád 2, y má rád 4, $[x] \cap [y] = \{(0,0)\}$ a rád prvku xy je 4.

Kontrapríklad: opäť (14) a (123)