# 1 Binárne operácie, pologrupy, monoidy

1. Každá konečná pologrupa obsahuje idempotentný prvok. [1]
2. Nech $M$ je monoid s jednotkou $e$. Dokážte, že ak $mm = e$ pre všetky $m \in M$, tak $M$ je komutatívny.
3. Tvoria matice tvaru $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ pologrupu/monoid/grupu? Nájdite ľavé/pravé neutrálne prvky.
4. Tvoria matice tvaru $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ pologrupu/monoid/grupu?
5. Dokážte, že $(\mathcal{P}(X), \cup)$ a $(\mathcal{P}(X), \cap)$ sú pologrupy. Sú tieto pologrupy izomorfné?
6. Nech $M \neq \emptyset$ a na $M^2$ je definovaná operácia $\circ$ ako $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$. Zistite či ide o pologrupu, monoid, grupu.
7. Nájdite všetky neizomorfné pologrupy, ktoré majú 2 prvky.
8. Nájdite zobrazenie $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré má a) aspoň 2 rôzne ľavé inverzie; b) aspoň dve rôzne pravé inverzie; c) nekonečne veľa ľavých inverzií; d) nekonečne veľa pravých inverzií.
9. Dokážte, že pre ľubovoľnú binárnu operáciu $*$ platí $a^n * a^m = a^{n+m}$ a $(a^n)^m = a^{nm}$ pre ľubovoľné prirodzené čísla $m$, $n$. Ak ide o grupu, vedeli by ste dodefinovať $a^n$ aj pre celé čísla? Dokážte, že uvedené vlastnosti platia aj pri tejto definícii. (Výraz $a^n$ sa definuje indukciou tak, že $a^1 = a$ a $a^{n+1} = a^n * a$.)
10. Dokážte, že ak $ab = ba$, tak $(ab)^n = a^n b^n$ pre každé prirodzené číslo $n$.
11. Nech $M$ je monoid. Definujme na $\mathcal{P}(M)$ binárnu operáciu nasledovne: $AB = \{xy; x \in A, y \in B\}$. Je $P(M)$ s touto operáciou monoid? Ak $M$ je grupa, bude aj $P(M)$ s takto definovanou operáciou grupa?
12. Konečná pologrupa, v ktorej platia zákony o krátení je grupa. Nájdite príklad nekonečnej pologrupy, kde platia zákony o krátení, ale nie je to grupa.
13. Dokážte, že konečná pologrupa s krátením sprava ($ba = ca \Rightarrow b = c$), ktorá má ľavý neutrálny prvok, je grupa. Zostrojte príklad pologrupy s krátením sprava, ktorá nie je grupa.

# 2 Grupy

1. Matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ tvoria spolu s násobením grupu.

[1] 1.prémia: 1 bod

2. Doplňte nasledujúcu tabuľku

   | | a | b | c | d |
   |---|---|---|---|---|
   | a | | | | |
   | b | | | | d |
   | c | | | d | |
   | d | | | | |

   tak aby ste dostali grupu.

3. Dokážte, že $(\mathcal{P}(X), \triangle)$, kde $\triangle$ označuje symetrickú diferenciu množín, je grupa.

4. Je $(\mathbb{Z}, *)$, kde $a * b = ab + a + b$ grupa? Ak nie, vedeli by ste zmeniť množinu $\mathbb{Z}$ na inú množinu, tak aby to bola grupa?

5. Nech $(G, \circ)$ je grupa a $x, y \in G$. Dokážte, že ak $(x \circ x) \circ (y \circ y) = (x \circ y) \circ (x \circ y)$, tak $x \circ y = y \circ x$. Vedeli by ste nájsť príklad pologrupy, prípadne monoidu, kde to neplatí?

6. Ako vyzerajú neutrálny prvok a inverzné prvky v direktnom súčine grúp $G \times H$? Je direktný súčin komutatívnych grúp komutatívna grupa?

7. Dokážte, že horné trojuholníkové matice s nulami na diagonálach [2] rozmeru $3 \times 3$ tvoria grupu s operáciou $X \circ Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$. Ako $[X, Y]$ označujeme $XY - YX$.

8. Dokážte, že horné trojuholníkové matice s nulami na diagonálach tvoria grupu s operáciou $X \circ Y = X + Y - XY$.

9. Nech $*$ je asociatívna binárna operácia na množine $G \neq 0$. Nech každá rovnica tvaru $a * x = y$ alebo $y * a = b$ má riešenie v $G$ pre $a, b \in G$. Dokážte, že:
   a) Existuje pravý neutrálny prvok $d \in G$ taký, že pre všetky $a \in G$ platí $a * d = a$. (Hint: Ukážte najprv, že $a * d = a \Rightarrow b * d = b$ pre všetky $a, b \in G$.)
   b) Existuje ľavý neutrálny prvok $e \in G$; t.j. $e * a = a$ pre všetky $a \in G$.
   c) Ľavý a pravý neutrálny prvok sa rovnajú.
   d) $G$ je grupa.

10. Každá konečná grupa s párnym počtom prvkov obsahuje prvok $x$ taký, že $x = x^{-1}$.

11. Regulárne matice typu $n \times n$ s operáciou násobenia matíc tvoria grupu.

12. Matice typu $n \times n$, ktorých determinant je rovný 1, s operáciou násobenia matíc tvoria grupu.

13. Matice typu $n \times n$, ktoré v každom riadku a každom stĺpci majú práve jednu jednotku a ostatné prvky sú nulové, s operáciou násobenia matíc tvoria grupu. Matice typu $n \times n$, ktoré v každom riadku a každom stĺpci majú najviac jednu jednotku a ostatné prvky sú nulové, tvoria pologrupu.

14. Ak $(K, +, \cdot)$ je pole, tak $K \times K$ s operáciou $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$ tvorí grupu. (Prípadne riešte pre $K = \mathbb{R}$.)

# 3 Podgrupy

1. Nech $a, b \in G$, kde $G$ je grupa, $a, b \neq 1$ také, že $ab = ba$ a $b^3 = 1$. Dokážte, že $\{a^n, ba^n, b^2 a^n; n \in \mathbb{Z}\}$ je podgrupa grupy $G$.

[2] uppper niltriangular matrices

2. [3] Nech $G$ je grupa. Pre podmnožiny $A, B \subseteq G$ označíme $AB = \{ab; a \in A, b \in B\}$.
   a) Nech $A$ a $B$ sú podgrupy $G$. Dokážte, že $AB$ je podgrupa $G$ práve vtedy, keď $AB = BA$.
   b) Nájdite príklad grupy $G$ a jej podgrúp $A$ a $B$ takých, že $AB$ nie je podgrupa $G$.
   c) Ak $A$, $B$ sú konečné podgrupy $G$, tak $|AB|.|A \cap B| = |A|.|B|$.
   d) Nech $A$, $B$, $C$ sú podgrupy také, že $A \subseteq C \subseteq AB$. Dokážte $C = (AB) \cap (AC) = A(B \cap C)$.

3. Ak $A, B, C$ sú podgrupy $G$ a $C \subseteq A \cup B$, tak $C \subseteq A$ alebo $C \subseteq B$.

4. Tvoria pri sčitovaní/násobení matíc grupu štvorcové matice $n \times n$, ktoré sú: symetrické, antisymetrické, diagonálne, regulárne, horné trojuholníkové...

5. Nájdite všetky podgrupy $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$.

6. Nájdite príklad nekonečnej grupy, ktorá obsahuje netriviálnu konečnú podgrupu. (Pod netriviálnou podgrupou rozumieme podgrupu, ktorá má viac ako jeden prvok.)

7. Ak $x \in G$, tak $\{x^n; n \in \mathbb{Z}\}$ je podgrupa $G$.

8. Nech $n$ je prirodzené číslo. Potom $C_n = \{x \in \mathbb{C}; x^n = 1\}$ je podgrupa $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Takisto $G = \{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

9. Ukážte, že $H = \{\frac{m}{n}; m, n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

10. Nech $G$ je grupa a $a$ je pevne zvolený prvok $G$. Dokážte, že $\{g \in G; ag = ga\}$ je podgrupa grupy $G$.

11. Dokážte, že grupa $C_n = \{x \in \mathbb{C}; x^n = 1\}$ je jediná podgrupa $(C \setminus \{0\}, \cdot)$, ktorá má $n$ prvkov.

# 4 Cyklické grupy

1. Nájdite rád jednotlivých prvkov v $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$, v $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \odot)$, v $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ a v $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

2. Každá konečná grupa s párnym počtom prvkov obsahuje prvok rádu 2.

3. V každej grupe majú nasledujúce prvky rovnaký rád: $x$ a $yxy^{-1}$; $ab$ a $ba$. Naopak, prvky $xyz$ a $zyx$ môžu mať rôzny rád.

4. V každej grupe majú prvky $abc$, $bca$ a $cab$ rovnaký rád.

5. Ak rád prvku $a$ v grupe $G$ je $n$ a $e$ je neutrálny prvok tejto grupy, tak pre prirodzené čísla $k \in \mathbb{N}$ platí $a^k = e$ práve vtedy, keď $n \mid k$. Ďalej pre každé $s \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $a^s = a^m$ a $0 \leq m \leq m - 1$.

6. Nech $x$ a $y$ sú prvky konečného rádu grupy $G$ a nech $xy = yx$. Dokážte, že ak ich rády $k$ a $l$ sú nesúdeliteľné, tak rád prvku $xy$ je $kl$. Dokážte, že existujú exponenty $m$ a $n$, také, že rád prvku $x^m y^n$ je rovný $[k, l]$ (najmenší spoločný násobok rádov). Platia tieto tvrdenia aj ak $x$ a $y$ nekomutujú?

[3] Toto je druhá prémia; 4×0,5 bodu. Pri hľadaní kontrapríkladu Vám možno pomôže, keď budete poznať viac príkladov nekomutatívnych grúp, prípadne podgrúp, ktoré nie sú normálne. Preto túto úlohu stačí odovzdávať až keď tieto veci preberieme – samozrejme, dá sa vyriešiť aj s tými vedomosťami, ktoré máte teraz.

7. Nech $x$ a $y$ sú prvky konečného rádu grupy $G$ a nech $xy = yx$. Dokážte, že ak $[x] \cap [y] = \{e\}$, čiže prienik podgrúp generovaných týmito prvkami je triviálna podgrupa, tak rád prvku $xy$ je najmenší spoločný násobok rádov prvkov $x$ a $y$.
8. Každé 2 nekonečné cyklické grupy sú izomorfné.
9. Nájdite všetky podgrupy cyklickej grupy rádu $p^k$, kde $p$ je prvočíslo.