1 Faktorové grupy, Lagrangeova veta

1. Overte, či H je normálna podgrupa grupy G a opíšte faktorovú grupu G/H (aké má triedy, či je izomorfná s nejakou známou grupou).
   a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); x + 2y = 0\}$
   b) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$
   c) $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = \mathbb{R}$
   d) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\})$, $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   e) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\})$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$
   f) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z \in \mathbb{Z}\}$
   g) $G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$, $H = [(2, 2)]$
   h) $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, $H = \{(n, m, 0); n, m \in \mathbb{Z}\}$
   i) $G = (\{c \in \mathbb{C}; c^{12} = 1\}, \cdot)$, $H = \{c \in \mathbb{C}\}$
   j) $G = (S_n, \circ)$, $H = A_n$
   k) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = n\mathbb{Z}$
   l) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \{c \in \mathbb{C}; c^6 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$
   m) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

2. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}, \cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c \in \mathbb{C}; c^n = 1\}, \cdot)$
   a) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$ (pod $\mathbb{R}^+$ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0 \notin \mathbb{R}^+$), S
   b) $(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z}$, $S/\mathbb{C}_n$ S,
   c) $(C \setminus \{0\}, \cdot)$, $(C \setminus \{0\}, \cdot)/C_n$
   d) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$, C_n
   e) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/C_n$, $\mathbb{R}^+$
   f) C_{12}/C_4, Z_3
   g) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)/(\mathbb{Z}_2 \times \{0\})$, $\mathbb{Z}_3$
   h) $S_3/[(123)]$, $(\mathbb{Z}_2, +)$

3. Nájdite pravé a ľavé triedy rozkladu G podľa H. Je H normálna podgrupa grupy G?
   a) $G = (S_3, \circ)$, $H = [(12)]$
   b) $G = (S_3, \circ)$, $H = A_3$
   c) $G = (S_3, \circ)$, $H = [(132)]$

4. Ak p je prvočíslo a $k \geq 1$ prirodzené číslo, tak každá p^k-prvková grupa má p-prvkovú podgrupu.

5. Ak grupa G má p^2 prvkov, kde p je prvočíslo, tak každá vlastná podgrupa G je cyklická.

6. Ak H je podgrupa G a $[G : H] = 2$, tak H je normálna a H obsahuje prvok x^2 pre ľubovoľné $x \in G$.

7. Nájdite všetky normálne podgrupy grupy S_3.

8. Dokážte, že každá jednoduchá podgrupa grupy S_n je obsiahnutá v grupe A_n. (Grupa sa nazýva jednoduchá, ak nemá žiadne normálne podgrupy okrem seba samej a triviálnej podgrupy.)

9. Dokážte, že každá 8-prvková grupa obsahuje dvojprvkovú podgrupu.

10. Nech G je grupa všetkých regulárnych matíc typu $n \times n$ (s operáciou násobenia matíc). Ako H označme tie z nich, ktoré majú determinant $|A| = 1$. Dokážte, že H je invariantná podgrupa G! Vedeli by ste nájsť grupu izomorfnú s G/H?

11. Nech H je invariantná podgrupa G. Dokážte, že G/H je komutatívna práve vtedy, keď $g^{-1}h^{-1}gh \in H$ pre všetky $g, h \in G$. (Prvky tvaru $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ sa nazývajú komutátory.)

12. Nech $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ (jednotková kružnica v komplexnej rovine). Ukážte, že zobrazenie $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definované ako $x\varphi = e^{2\pi xi}(\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)$ je surjektívny homomorfizmus. Nájdite $\operatorname{Ker} \varphi$. Aká faktorová grupa je potom izomorfná s kružnicou?

13. Je podgrupa $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ normálna podgrupa A_4?

14. Faktorová grupa cyklickej grupy je cyklická.

15. Ak H je podgrupa G taká, že index $[G : H]$ je konečný a K je podgrupa G taká, že $H \subset K \subset G$, tak $[G : H].[H : K] = [G : K]$.

16. Nech $H \subseteq K$ sú normálne podgrupy grupy G. Dokážte, že H je normálna podgrupa grupy K a K/H je normálna podgrupa grupy G/H.

17. Centrom grupy G nazývame množinu $Z(G) = \{g \in G; (\forall h \in G) gh = hg\}$ takých prvkov, ktoré komutujú so všetkými prvkami G. Ukážte, že $Z(G)$ je normálna podgrupa grupy G.

18. Nech p je prvočíslo. Dokážte, že až na izomorfizmus existujú práve 2 grupy, ktoré majú p^2 prvkov a že obe tieto grupy sú komutatívne.[1]

19. Dokážte, že alternujúca grupa A_n je jedinou podgrupou S_n indexu 2. Nájdite príklad grupy, ktorá má viac než jednu podgrupu indexu 2. [2]

20. Ak H a H' sú normálne podgrupy G také, že $H \cap H' = \{e\}$, tak $hh' = h'h$ pre ľubovoľné $h \in H$ a $h' \in H'$ (ľubovoľný prvok H komutuje s ľubovoľným prvkom H'.)

21. Dokážte, že ľubovoľná normálna podgrupa A_n pre $n \geq 5$, ktorá obsahuje aspoň jeden cyklus dĺžky 3 je celá grupa A_n.

22. Dokážte, že v každej grupe s nepárnym počtom prvkov je ľubovoľný prvok štvorcom nejakého (a navyše jednoznačne určeného) prvku tejto grupy.

23. Ak A a B sú normálne podgrupy G, $a \in A$ a $b \in B$, tak $aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B$.

24. Čomu sa rovná najväčší možný rád prvku grupy S_{12}.

[1] Prémia za 1 bod.
[2] Prémia za 1 bod.