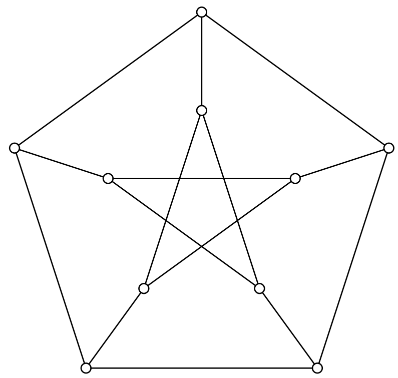
Každá úloha je za 2 body. Za domáce úlohy sa v priebehu semestra dá získať 10 bodov + nejaké body navyše, ak budú prémie. Termín na odovzdanie úloh je do konca semestra alebo kým daná úloha nebude vysvetlená na niektorom cviku.

Petersenov graf



1. Koľko je a) všetkých b) navzájom neizomorfných grafov na 5 vrcholoch s 3 hranami.

2. Pridajte do Petersenovho grafu 1 hranu tak, aby nový graf mal Hamiltonovskú kružnicu. Nájdite Hamiltonovskú kružnicu v grafe, ktorý vznikne z Petersenovho grafu vynechaním 1 vrcholu. Môžeme vynechať ľubovoľný vrchol, ak chceme aby nový graf mal hamiltonovskú kružnicu? (Prémia za 2 body: Môžeme pridať ľubovoľnú hranu medzi 2 nesusednými vrcholmi, ak chceme aby nový graf mal hamiltonovskú kružnicu.)

3. Koľko rôznych hamiltonovských kružníc má graf K_n?

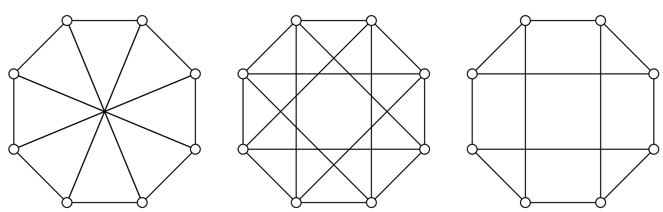
4. Ak graf G má n vrcholov a každý vrchol je stupňa aspoň $\frac{n-1}{2}$, tak G je súvislý.

5. * Ak G je graf na $2n$ vrcholoch, ktorý má $n^2 + 1$ hrán, tak G obsahuje trojuholník (kružnicu dĺžky 3).

6. V každom grafe, ktorý má aspoň 2 vrcholy, existujú 2 (rôzne) vrcholy, ktoré majú rovnaký stupeň.

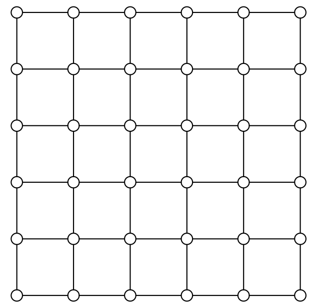
7. Nájdite (pre každé n) príklad grafu na n vrcholoch, v ktorom je súčet stupňov ľubovoľných 2 vrcholov aspoň $n - 1$ ale tento graf nemá hamiltonovskú kružnicu.

8. (3 body) Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!

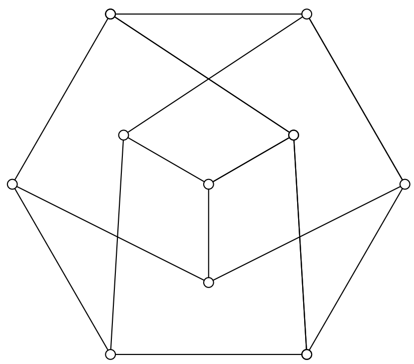


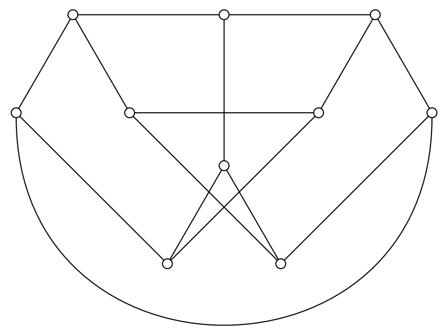
9. Majme graf ktorý vznikne rozdelením štvorca na n^2 menších štvorcov. (Na nasledujú-

com obrázku je tento graf pre $n = 6$.) Pre aké n má tento graf Hamiltonovskú kružnicu?



10. Sú grafy na nasledujúcich obrázkoch izomorfné s Petersenovým grafom? Ak áno, nájdite izomorfizmus.





1. Rôznych grafov s 3 hranami na 5 vrcholoch je $\binom{10}{3} = 120$, lebo vyberáme 3 hrany z $10 = \binom{5}{2}$ možných. Pre neizomorfné grafy máme 4 možnosti.

2. Pridaním akejkoľvek novej hrany alebo odobraním ktoréhokoľvek vrcholu vznikne graf, ktorý má hamiltonovskú kružnicu. To, že nezáleží na voľbe vrcholu možno odôvodniť tým, že pre ľubovoľné 2 vrcholy u, v Petersenovho grafu existuje homomorfizmus, ktorý zobrazí u na v.

Dá sa dokázať aj to, že pre ľubovoľnú dve dvojice nesusedných vrcholov u_1, u_2 a v_1, v_2 (teda (u_1, u_2) ani (v_1, v_2) nie je hrana) existuje homomorfizmus f taký, že $f(u_1) = v_1$ a $f(u_2) = v_2$. To možno dokázať napríklad pomocou reprezentácie Petersenovho grafu ako grafu na dvojprvkových podmnožinách $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (dá sa nájsť premutácia tejto 5-prvkovej množiny, ktorá určí hľadaný homomorfizmus). Priamočiarejšie riešenie je vyskúšať všetky možnosti – ľahko vidíme homomorfizmy pre dvojice „nehrán“, ktoré dostaneme otočením. Odhliadnuc od otočenia už zostáva len niekoľko možností, ktoré sa overia ľahko. Preto môžeme pridať ľubovoľnú novú hranu.

3. Ak 2 Hamiltonovské kružnice chápeme ako rôzne, ak sú to rôzne postupnosti vrcholov, dostaneme $n!$ možností (všetky usporiadania vrcholov). Prirodzenejšie je brať ich ako grafy – čiže rovnaké sú ak majú rovnakú množinu hrán. Každá kružnica zodpovedá $2n$ poradiam vrcholov (2 možné smery a n otočení), preto dostaneme $\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$ kružníc.

4. Chcem dokázať, že pre ľubovoľnú dvojicu vrcholov existuje cesta z u do v. Ak sú vrcholy u a v susedné, máme cestu pozostávajúcu z jedinej hrany (u, v). Zostáva možnosť, že

sú nesusedné. Pretože oba majú stupeň aspoň $\frac{n-1}{2}$, súčet ich stupňov je $n-1$. Sú spojené s niektorými zo zostávajúcich $n-2$ vrcholov. Pretože $n-1 > n-2$, musí existovať vrchol, ktorý je spojený s u aj v. Teda máme cestu dĺžky 2.

5*. Indukciou dokážeme ekvivalentné tvrdenie. Neobsahuje trojuholník $\Rightarrow$ najviac n^2 hrán.

Pre $n = 1, 2$ sa to overí vyskúšaním všetkých možností.

Indukčný krok. Predpokladajme, že to platí pre n a majme graf G na $2(n+1)$ vrcholoch, ktorý neobsahuje trojuholník. Uvažujme ľubovoľnú hranu uv tohto grafu. Potom stupne vrcholov u a v spĺňajú nerovnosť $d(u) + d(v) \leq 2(n+1)$ (inak povedané z týchto vrcholov vychádza –okrem hrany, ktorá ich spája – najviac $2n$ hrán.) Keby to tak nebolo, tak by musel existovať vrchol w spojený s oboma týmito vrcholmi a mali by sme trojuholník u, v, w.

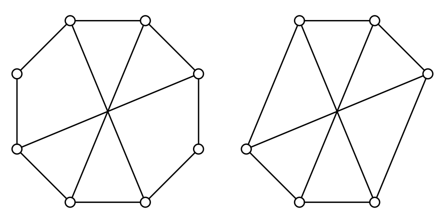
Graf $G - \{u, v\}$, ktorý vznikne vynechaním vrcholov u a v má $2n$ vrcholov a neobsahuje trojuholník. Podľa indukčného predpokladu má tento graf najviac n^2 vrcholov. Celý graf má potom najviac $n^2 + d(u) + d(v) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ hrán.

6. Ak graf obsahuje vrchol stupňa n, tak tento vrchol je spojený so všetkými ostatnými vrcholmi. Teda graf v takomto prípade nemôže mať vrchol stupňa 0. Stupne vrcholov sú teda $1, 2, \ldots, n$ – keďže vrcholov je n a možností iba $n-1$, nájdeme 2 vrcholy rovnakého stupňa (Dirichletov princíp). Zostáva nám prípad, že graf neobsahuje vrchol stupňa n. Teraz opäť máme $n-1$ možností: $0, 1, \ldots, n-1$; preto opäť existujú 2 vrcholy rovnakého stupňa.

7. Môžeme zobrať graf, ktorý vznikne z K_{n-1} pridaním 1 vrchola a 1 hrany, ktorá spája nový vrchol s niektorým vrcholom grafu K_{n-1}. Ak si vezmeme ľubovoľné 2 vrcholy, tak jeden z nich má stupeň aspoň $n-2$ (pretože niektorý z týchto vrcholov patrí do K_{n-1}) a druhý vrchol má stupeň aspoň 1. Súčet stupňov je $n-1$. Tento graf nemá hamiltonovskú kružnicu, pretože nový vrchol má stupeň 1.

8. Prvý obrázok: V tomto prípade je dĺžka najkratšej kružnice 4 a rovnaký postup ako pri druhom obrázku nefunguje.

Vyskúšame iný postup. Najprv z grafu vynecháme 1 hranu. Ak by bol pôvodný graf rovinný, aj tento graf by bol rovinný. (Rovinné nakreslenie nového grafu vznikne z nakreslenia pôvodného grafu vynechaním tej istej hrany.) V grafe vznikli 2 vrcholy stupňa 1, ktoré tiež neovplyvnia rovinnosť. Ich vynechanám vznikne $K_{3,3}$, o ktorom vieme, že nie je rovinný.



Druhý obrázok: Nie je rovinný. Máme $v = 8$, $h = 16$, teda pri rovinnom nakreslení by musel mať graf $s = 2 - v + h = 10$ oblastí. Súčasne každá oblasť by bola ohraničená aspoň 4 hranami, lebo najkratšia kružnica v tomto grafe má dĺžku 4. Každá hrana sa nachádza v 2 oblastiach, z čoho máme $2h \geq 4s$, teda v tomto prípade by platilo $32 \geq 40$, čo neplatí.

Tretí obrázok: Je rovinný (rovenné nakreslenie dostaneme napríklad tak, že dvojicu vodorovných hrán nakreslím cez vonkajšok osemuholníka.)

9. Pre párne n sa pomerne ľahko dá vymyslieť, ako bude vyzerať hamiltonovská kružnica. Pre nepárne n dostaneme bipartitný graf na nepárnom počte vrcholov a ten nemá hamiltonovskú kružnicu.

10. Sú izomorfné. (Izomorfizmus sa dá nájsť vcelku ľahko, tak som ho sem nepísal.)