V každej úlohe svoju odpoveď zdôvodnite.

1. (10 bodov) Nech P_1 a P_2 sú dve cesty maximálnej možnej dĺžky v grafe G. Dokážte, že P_1 a P_2 majú spoločný vrchol. Musia mať spoločnú hranu?
2. (10 bodov) Pre aké n sa dá graf K_n nakresliť 1 ťahom? Pre aké m, n sa dá $K_{m,n}$ nakresliť jedným ťahom? Ako nazývame také grafy, ktoré sa dajú nakresliť 1 ťahom?
3. (20 bodov) Čo je hamiltonovská kružnica? Vyslovte a dokážte Oreho vetu. Ukážte na príklade, že neplatí: Ak súčet stupňov ľubovoľných 2 vrcholov grafu G je aspoň $n-1$, tak G má hamiltonovskú kružnicu.
4. (20 bodov) Dokážte, že každý rovinný graf je 5-farbiteľný. (Heawoodova veta)

1. Najprv ukážeme, že také 2 cesty musia mať spoločný vrchol. Základná myšlienka je dokázať, že keď máme 2 cesty, ktoré nemajú spoločný vrchol, vieme (v súvislom grafe) skonštruovať cestu väčšej dĺžky.

Majme teda 2 cesty P_1 a P_2 dĺžky n, ktoré nemajú spoločný vrchol. Vrcholy v P_1 označme $u_1, u_2, \dots, u_n$ a $v_1, v_2, \dots, v_n$. Vieme, že existuje cesta P z u_1 do v_1 (lebo graf G je súvislý).

Nech y je prvý vrchol cesty P, ktorý patrí do P_2. (Aspoň 1 taký vrchol existuje, pretože cesta P končí vo v_1.) Nech x je posledný vrchol cesty P, ktorý:

• je v tejto ceste pred vrcholom y

• a súčasne patrí do P_1.

(Taký vrchol existuje, lebo cesta P začína v u_1.)

Označme k také číslo, pre ktoré $u_k = x$ a nech l je také číslo, že $v_l = y$. Vieme, že v grafe G existujú cesty:

$u_1, u_2, \dots u_k,$

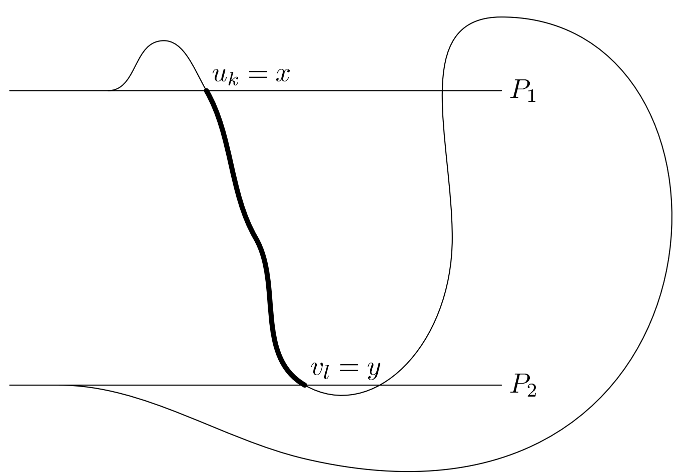
$u_k, u_{k+1}, \dots u_n$

$v_1, v_2, \dots v_l,$

$v_l, v_{l+1}, \dots v_n$

úsek cesty P medzi vrcholmi x a y, označme ho $x = p_0, p_1, \dots p_s = y$.

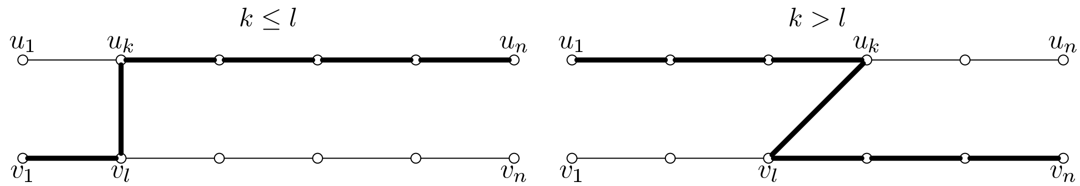
Pretože P_1 a P_2 nemajú spoločný vrchol, platí $x \neq y$, teda tento úsek cesty P má dĺžku aspoň 1 (teda $s \geq 1$).



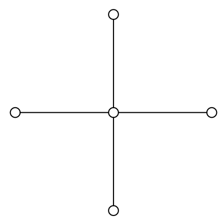
Z týchto ciest chceme poskladať novú cestu väčšej dĺžky ako n.

Môžu nastať 2 prípady. Buď $k \leq l$. V tomto prípade zoberme novú cestu $v_1, v_2, \ldots, v_l = p_s, p_{s-1}, \ldots, p_0 = u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$. Dĺžka tejto cesty je $l+s+n-k = n+(l-k)+s \geq n > n$. Je to teda cesta väčšej dĺžky ako n.

V prípade $k > l$ zoberme $u_1, u_2, \ldots, u_k = p_0, p_1, \ldots, p_s = v_l, v_{l+1}, \ldots, v_n$, čo je cesta dĺžky $k+s+n-l = n+(k-l)+s > n+1$, teda má určite dĺžku väčšiu ako n.



Nasledujúci obrázok je príklad súvislého grafu, v ktorom cesty maximálnej možnej dĺžky nemajú spoločnú hranu.



2. Grafy, ktoré sa dajú nakresliť jedným ťahom voláme eulerovské. Vieme, že graf sa má otvorený eulerovský ťah práve vtedy, keď všetky jeho vrcholy okrem 2 majú párny stupeň. Graf má uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď všetky jeho vrcholy majú párny stupeň.

V grafe K_n majú všetky vrcholy stupeň $n-1$. Teda pre nepárne n majú všetky vrcholy párny stupeň a existuje uzavretý eulerovský ťah. Pre $n = 2$ máme 2 vrcholy, ktoré majú stupeň 1 – teda existuje otvorený eulerovský ťah. V ostatných prípadoch eulerovský ťah neexistuje.

V grafe $K_{m,n}$ je m vrcholov stupňa n a n vrcholov stupňa m. Preto uzavretý eulerovský ťah existuje práve vtedy, keď m aj n sú párne. Otvorený eulerovský ťah existuje práve vtedy, keď jedno z čísel m, n je 2 a druhé z nich je nepárne.