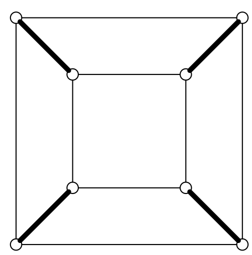
Diskrétna matematika 24. mája 2007

V každej úlohe svoju odpoveď zdôvodnite.

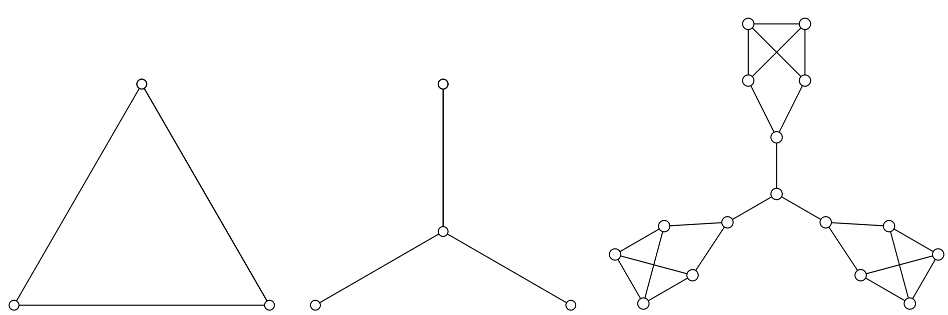
1. Dokážte, že bipartitný graf na nepárnom počte vrcholov nemá hamiltonovskú kružnicu. (10 bodov)
2. (a) Nakreslite graf, ktorý má kompletné párovanie.
   (b) Nakreslite graf, ktorý nemá kompletné párovanie. (10 bodov)
3. Dokážte: Graf G na n vrcholoch je strom $\Leftrightarrow$ je súvislý a má $n-1$ hrán $\Leftrightarrow$ pre každé 2 vrcholy u a v grafu G existuje v G práve 1 cesta z u do v $\Leftrightarrow$ G neobsahuje kružnice a má $n-1$ hrán. (20 bodov)
4. Vyslovte a dokážte Eulerovu formulu. Dokážte, že z nej vyplýva, že:
   a) Ak rovinný graf má h hrán a v vrcholov, tak $h \leq 3v-6$.
   b) Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupňa najviac 5. (20 bodov)

1. Ak je graf párny, tak aj každý jeho podgraf (t.j. namiesto pôvodnej množiny vrcholov/hrán vezmem nejakú podmnožinu) je tiež párny (stačí zobrať ofarbenie vrcholov z pôvodného grafu). Teda ak G je párny a má hamiltonovskú kružnicu, tak aj pre túto kružnicu existuje ofarbenie 2 farbami. Ak sa dá kružnica ofarbiť 2 farbami, musí mať párny počet vrcholov. (To vidno z toho, že keď ju začnem ofarbovať, vždy pre nasledujúci vrchol musím použiť opačnú farbu. Ak začnem tak, že vrcholu u_1 dám čiernu farbu a vrcholy tejto kružnice sú $u_1, \ldots, u_n$, tak u_{2k+1} budú čierne a u_{2k} biele. Aby to bolo dobré ofarbenie, aj u_n musí mať bielu farbu, teda $n = 2l$, číslo n je párne.)

2. Na nasledujúcom obrázku je graf (kocka) so zvýrazneným kompletným párovaním.



Príkladmi grafov, ktoré nemajú kompletné párovanie sú: ľubovoľný graf na nepárnom počte vrcholov, graf $K_{1,n}$ pre $n > 1$ (hviezda), graf pozostávajúci z izolovaných vrcholov atď. Ťažšie je vymyslieť pravidelný graf na párnom počte vrcholov, ktorý nemá kompletné párovanie – jeden taký graf vidíte na obrázku.



4. a) Podľa Eulerovej formuly platí $s = 2 - v + h$, kde s je počet oblatí rovinného nakreslenia grafu G. Sčítajme dĺžky hraníc jednotlivých oblastí $L := l_1 + l_2 + \ldots + l_s$.
Pretože každá oblasť musí byť ohraničená aspoň 3 hranami, máme $l_k \geq 3$ a $L = l_1 + l_2 + \ldots + l_s \geq 3s$.
Na druhej strane každá hrana patrí práve dvom oblastiam, preto sme ju v tomto súčte započítali dvakrát, teda $L = 2h$.
Porovnaním týchto 2 vzťahov dostaneme

$$2h \geq 3s = 3(2 - v + h) = 6 - 3v + 3h$$
$$h \leq 3v - 6$$

b) Nech by nejaký graf mal všetky vrcholy stupňa viac ako 5, teda stupeň každého vrchola je aspoň 6. Pretože súčet stupňov je rovný $2h$, máme $2h \geq 6v$, z čoho vyplýva $h \geq 3v$, čiže neplatí nerovnosť $h \leq 3v - 6$, graf nemôže byť rovinný.