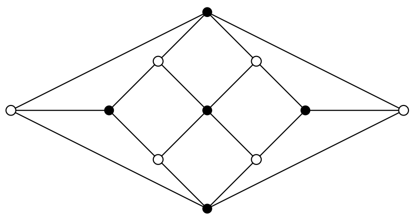
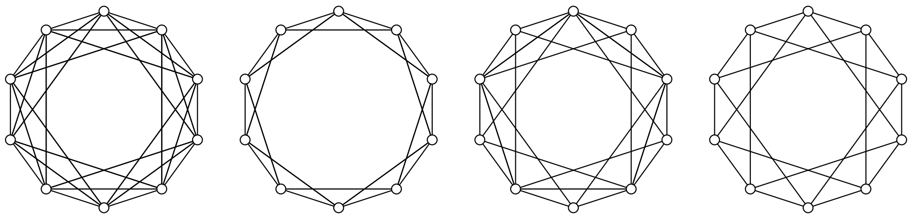
Diskrétna matematika 31. mája 2007

V každej úlohe svoju odpoveď zdôvodnite.

1. Je graf na nasledujúcom obrázku hamiltonovský? (10 bodov)



2. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite! (10 bodov)

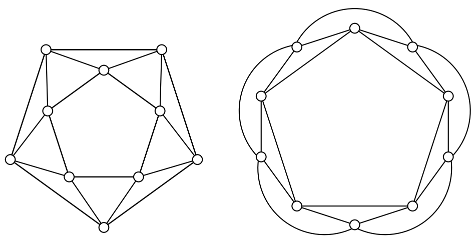


3. Definujte k-faktor grafu. Dokážte Petersenovu vetu. (20 bodov)
4. Definujte cestu, sled, ťah, kružnicu, uzavretý sled. Dokážte: Ak graf obsahuje uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky. Platí to pre sledy párnej dĺžky? (20 bodov)

1. Daný graf nie je hamiltonovský. Je bipartitný (ofarbenie 2 farbami je znázornené na obrázku) a má nepárny počet vrcholov. Podľa vety z prednášky je graf bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky. Preto tento graf nemôže mať hamiltonovskú kružnicu.

Poznámka: Niektorý ste sa pokúšali použiť Oreho alebo Diracovu vetu. Táto veta obsahuje len jednu implikáciu: Ak sú splnené podmienky na stupne vrcholov, tak je graf hamiltonovský. O obrátenej implikácii nehovorí nič. Preto môžeme túto vetu použiť iba vtedy, ak chceme dokázať, že graf je hamiltonovský. Na dôkaz toho, že graf NIE JE hamiltonovský sa táto veta použiť NEDÁ.

2. a) Každý vrchol má stupeň 6, preto tento graf nie je rovinný. (V rovinnom graf existuje vrchol stupňa najviac 5.)
b) Je rovinný, na obrázku dole je jeho dve rovinné nakreslenia.



c) $v = 10$, $h = 25 \Rightarrow s = 17$
Ak by bol rovinný tak $2h \geq 4s$, ale $50 \ngeq 4.17 = 68$
d) $v = 10$, $h = 20 \Rightarrow s = 12$
Z toho, že graf neobsahuje trojuholníky (najkratšia kružnica je dĺžky 4) dostaneme: $2h \geq 4s$, čo však neplatí $40 \ngeq 4.12 = 48$.
Ešte jednoduchšie (elegantnejšie) riešenie bolo všimnúť si, že grafy z úloh a) a c) obsahujú ako podgraf graf z úlohy d). Stačilo teda ukázať pre graf z úlohy d), že je nerovinný (takým spôsobom, ako sme uviedli hore). Keďže ho obsahujú a) aj c) ako podgraf, sú takisto nerovinné.