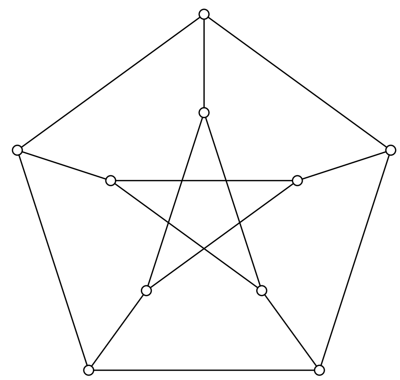
Diskrétna matematika 14. júna 2007

V každej úlohe svoju odpoveď zdôvodnite.

1. Dokážte: Ak v grafe G existuje sled z vrchola u do vrchola v, tak existuje aj cesta z u do v. (Návod: Dokázať, že najkratší sled je v skutočnosti cestou.) (10 bodov)

2. Dokážte, že Petersenov graf nie je rovinný. (10 bodov)



3. Definujte párny (bipartitný) graf. Dokážte, že graf je párny práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky. (20 bodov)

4. Definujte uzavretý a otvorený eulerovský ťah. Vyslovte a dokážte vetu, ktorá charakterizuje grafy majúce uzavretý (otvorený) eulerovský ťah. (20 bodov)

1. Uvažujme najkratší sled z u do v, jeho vrcholy označme $u = s_1, s_2, \dots, s_n = v$. Chceme ukázať, že tento sled je súčasne cesta. Na to stačí ukázať, že ak by sa v slede opakovali vrcholy, tak vieme nájsť kratší sled. Skutočne, ak $s_k = s_l$ pre $k < l$, tak aj $s_1, s_2, \dots, s_k = s_l, s_{l+1}, \dots, s_n$ je sled z u do v dĺžky menšej ako n.

2. Máme $v = 10$, $h = 15 \Rightarrow s = 7$, ak by bol rovinný, pri každom rovinnom nakreslení by musel mať 7 oblastí.
Najkratšia kružnica má dĺžku 5 $\Rightarrow$ platilo by $2h \geq 5s$, ale $2.15 = 30 \ngeq 5.7 = 35$.