

V každej úlohe svoju odpoveď zdôvodnite.

1. Dokážte, že kompletý graf na 5 vrcholoch nie je rovinný. Je rovinný graf, ktorý vznikne vynechaním 1 hrany z  $K_5$ ? (10 bodov)
2. Dokážte, že strom je párný graf. (10 bodov)
3. Dokážte: Všetky pravidelné konvexné mnohosteny sú: štvorsten, kocka, osemsten, dvanásťsten, dvadsaťsten. (Vieme, že miesto pravidelných konvexných mnohostenov sa môžeme zaoberať pravidelnými rovinnými grafmi.) (20 bodov)
4. Čo je hamiltonovská kružnica? Vyslovte a dokážte Oreho vetu. Ukážte na príklade, že neplatí: Ak súčet stupňov ľubovoľných 2 vrcholov grafu  $G$  je aspoň  $n - 1$ , tak  $G$  má Hamiltonovskú kružnicu. (20 bodov)

1. Predpokladajme, že by graf  $K_5$  bol rovinný. Pretože má  $v = 5$  vrcholov a  $h = 10$  hrán, jeho rovinné nakreslenie by malo

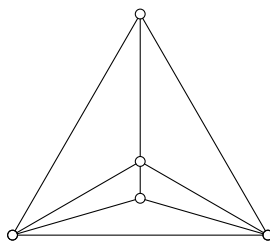
$$s = 2 + h - v = 7$$

oblastí. Ďalej si uvedomme, že každá oblasť musí byť ohraničená aspoň 3 hranami. Pretože každá hrana patrí práve 2 oblastiam, keď sčítame počet hrán pre jednotlivé oblasti, dostaneme dvojnásobok počtu hrán. Platí teda

$$2h \geq 3s.$$

V našom prípade by sme dostali  $20 \geq 21$ , čo neplatí. Predpoklad, že  $K_5$  je rovinný teda vedie k sporu.

Ak vynecháme 1 hranu z  $K_5$ , dostaneme rovinný graf. Jedno z možných rovinných nakreslení je na nasledujúcom obrázku.



(Tiež si môžeme všimnúť, že ak vynecháme 1 hranu, tak máme  $h = 9$ ,  $s = 6$ . Platí  $2h = 3s$ . Je však dôležité si uvedomiť to, že platnosť nerovnosti  $2h \geq 3s$  ešte nezaručuje rovinnosť grafu. Až keď sme našli rovinné nakreslenie, tak vieme, že graf skutočne je rovinný.)

2. Podľa vety z prednášky je graf párný práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky. Strom neobsahuje kružnice, nemôže teda obsahovať ani kružnicu nepárnej dĺžky.