1. Ak graf G má n vrcholov a každý vrchol je stupňa aspoň $\frac{n-1}{2}$, tak G je súvislý.

2. Dokážte, že graf K_5 nie je rovinný.

3. Pre aké m, n je kompletný bipartitný graf $K_{m,n}$ hamiltonovský (=má hamiltonovskú kružnicu)?

Riešenia

1. *Riešenie cez Dirichletov princíp.* Označme $G = (V, E)$. Vyberme si ľubovoľné 2 vrcholy u, v. Chceme ukázať, že medzi nimi existuje cesta. Buď v grafe je hrana (u, v), v tomto prípade máme medzi nimi cestu dĺžky 1. Zostáva to teda dokázať pre také vrcholy, ktoré nie sú spojené hranou.

Ak u, v nie sú spojené hranou, tak všetky hrany z u aj z v musia ísť do vrcholov patriacich do množiny $V \setminus \{u, v\}$, kde je $n - 2$ vrcholov. Pretože stupeň u je aspoň $\frac{n-1}{2}$ aj stupeň v je aspoň $\frac{n-1}{2}$, spolu z týchto vrcholov odchádza aspoň $n - 1$ hrán. Pretože $n - 1 > n - 2$, do niektorého vrcholu $x \in V \setminus \{u, v\}$ ide hrana z u aj hrana z v (Dirichletov princíp). To znamená, že u, x, v je cesta dĺžky 2.

Riešenie matematickou indukciou. 1° Pre $n = 1, 2, 3$ to vieme overiť vyskúšaním všetkých možností.

2° Majme $n \geq 3$. Nech tvrdenie platí pre každý graf na n vrcholoch. Skúsme ho dokázať pre grafy na $n+1$ vrcholoch. Máme teda graf na $n+1$ vrcholoch, kde každý vrchol má stupeň aspoň $\frac{n+1}{2}$. Odoberme z G ľubovoľný vrchol v.

Najprv overme, že môžeme použiť indukčný predpoklad na $G \setminus \{v\}$. Odobrali sme jeden vrchol. Ostatné vrcholy mali stupeň aspoň $\frac{n+1}{2}$. Odobraním 1 vrchola sme mohli z nich odobrať najviac 1 hranu, takže teraz majú všetky vrcholy stupeň aspoň $\frac{n-1}{2}$. Preto je graf $G \setminus \{v\}$ súvislý.

Pretože v má stupeň aspoň $\frac{n-1}{2} \geq 1$, musí byť spojený s niektorým vrcholom z $G \setminus \{v\}$. Teda aj celý graf G je súvislý.

2. Je v riešených úlohách.

3. To, že graf je bipartitný, znamená, že sa dá dobre ofarbiť 2 farbami. Ak graf obsahuje hamiltonovskú kružnicu a je bipartitný, tak ofarbenie daného grafu 2 farbami súčasne dáva aj ofarbenie jeho hamiltonovskej kružnice. Kružnicu vieme ofarbiť jediným spôsobom - obe farby sa musia striedať (skúste si nakresliť obrázok). Z toho vyplýva, že graf má párny počet vrcholov a počet vrcholov 1 farby musí byť rovnaký ako počet vrcholov druhej farby. V prípade grafu $K_{m,n}$ je práve m bielych a n čiernych vrcholov, máme teda $m = n$.

Komentáre

1. Viacerí ste sa to pokúšali riešiť tak, že spočítate počet hrán a z toho už odvodiť, že graf je súvislý. Pretože $2h = \sum d_G(v)$ dostaneme, že graf má aspoň $\frac{n(n-1)}{4}$ hrán. Neplatí však, že každý graf, ktorý má toľkoto hrán, už musí byť súvislý. (Napríklad na 4 vrcholoch máme nesúvislý graf, ktorý má 3 hrany.) Na cvičeniach sme si dokázali, že takéto tvrdenie platí pre $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, čo však je pre dosť veľké n viac ako $\frac{n(n-1)}{4}$.

Niektorí ste sa pokúšali robiť to indukciou – ale niekto to nedotiahol poriadne do konca.

2. To že sa mi graf nepodarí nakresliť v rovine, ešte neznamená, že sa to ani nedá – samozrejme je dobre, keď si to najprv vyskúšate – ale potom treba aj nejako dokázať.

V tejto súvislosti jedna poznámka k domácim úlohám. Ak dostaneme, že $2h \not\geq 3s$, tak vieme, že graf nie je rovinný. Ale ak dostaneme $2h \geq 3s$, to ešte nedokazuje nič. (Je to *nutná* podmienka, nie však postačujúca. Inak povedané – treba si uvedomiť, ktorým smerom tam implikácia platí a ktorým nie.)

3. Objavili sa v niektorých písomkách výroky typu: „graf je hamiltonovský, ak sa dá ofarbiť dvomi farbami tak, že susedné vrhcoly nie sú ofarbené tou istou farbou.“ Nie! Toto je definícia bipartitného grafu. A špeciálny typ bipartitného grafu, je kompletný bipartitný graf $K_{m,n}$ – slovo kompletný tu znamená, že každý vrchol jednej farby je spojený s každým vrcholom druhej farby.