Úloha 1. Dokážte: Nech G je graf na n vrcholoch. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

(i) G je strom (=súvislý graf bez kružníc),

(ii) G je súvislý a má $n-1$ hrán,

(iii) pre každé 2 vrcholy u a v grafu G existuje v G práve 1 cesta z u do v,

(iv) G neobsahuje kružnice a má $n-1$ vrcholov.

Najprv si dokážeme pár pomocných tvrdení, ktoré by nám mohli byť užitočné pri dôkaze hlavného tvrdenia. Viaceré z nich sa budú dokazovať indukciou.

Lema 1. *Ak graf na n vrcholoch je súvislý, tak má aspoň $n-1$ hrán.*

Dôkaz. Pre $n = 1, 2$ máme jediný taký graf a preň tvrdenie platí.

Indukčný krok: Majme graf G na $n+1$ vrcholoch. Zoberme ľubovoľný vrchol u a označme jeho stupeň $k = d(u)$. Vynechaním vrchola u vznikne graf, ktorý má najviac k komponentov súvislosti.

Označme $v_1, \ldots, v_k$ počty vrcholov jednotlivých komponentov. Každý z nich je súvislý, a teda podľa indukčného predpokladu má najviac $v_i - 1$ hrán. Celý graf G má teda najviac

$$(v_1 - 1) + (v_2 - 1) + \ldots + (v_k - 1) + k = v_1 + v_2 + \ldots + v_k + k - k = v_1 + v_2 + \ldots + v_k = n$$

hrán (pretože $v_1 + v_2 + \ldots + v_k$ je práve počet vrcholov grafu G po vynechaní vrchola u.) □

Lema 2. *Ak graf na n vrcholoch má všetky vrcholy stupňa aspoň 2, tak má aspoň n hrán. (Teda ak má najviac $n-1$ hrán, musí obsahovať vrchol stupňa najviac 1.)*

Dôkaz. Vieme, že počet hrán sa rovná polovici súčtu stupňov. V našom prípade je súčet stupňov $2n$, preto máme aspoň n hrán. □

Lema 3. *Ak graf G má všetky vrcholy stupňa aspoň 2, tak obsahuje kružnicu.* (*Z toho dostávame, že ak nejaký graf neobsahuje kružnicu, tak musí obsahovať vrchol stupňa najviac 1. Špeciálne každý strom aspoň na 2 vrcholoch má vrchol stupňa 1.*)

Dôkaz. Nech $v_1, \ldots, v_n$ je najdlhšia cesta v grafe G. Určite platí $n \geq 2$, inak by každý vrchol bol stupňa najviac 1. Stačí nám ukázať, že vrchol v_n je spojený hranou s nejakým vrcholom v_l kde $l < n-1$, pretože potom vrcholy $v_l, v_{l+1}, \ldots, v_n$ vytvoria kružnicu.

Postupujme sporom. Predpokladajme, že vrchol v_n nie je spojený so žiadnym z predchádzajúcich vrcholov. Pretože v_n má stupeň aspoň 2, musí byť spojený s nejakým iným vrcholom, ktorý označíme v_{n+1}. Vrcholy $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ tvoria cestu – dostávame spor s tým, že sme predpokladali, že cesta $v_1, \ldots, v_n$ je najdlhšia. □

Poznámka: V predchádzajúcom dôkaze sme videli ďalší často používaný postup – pri dôkaze nejakého tvrdenia občas pomôže, ak si vezmeme najväčší alebo najmenší objekt s danou vlastnosťou.

Lema 4. *Ak graf na n vrcholoch neobsahuje kružnice, tak má najviac $n-1$ hrán.*

Dôkaz. Opäť budeme postupovať indukciou. Pre $n = 1, 2$ je to zrejmé.

Indukčný krok: Majme graf na $n+1$ vrcholoch neobsahujúci kružnice. Potom každý jeho vrchol má stupeň najviac 1. Ak sú všetky vrcholy stupňa 0, tak tvrdenie platí (graf má 0 hrán).

V opačnom prípade máme aspoň 1 vrchol stupňa 1. Jeho vynechaním (čím súčasne vynecháme práve 1 hranu) dostaneme graf na n vrcholoch bez kružníc. Podľa indukčného predpokladu po vynechaní vznikol graf, ktorý má najviac $n-1$ hrán, preto pôvodný graf má najviac n hrán. □

Z lemy 1 a lemy 4 hneď vidíme, že

Dôsledok 1. *Strom na n vrcholoch má práve $n-1$ hrán.*

Tento dôsledok nám ukazuje, že platia implikácie (i)$\Rightarrow$ (ii) a (i)$\Rightarrow$ (iv).

(i)$\Rightarrow$ (iii) Sporom. Predpokladajme, že by medzi nejakými 2 vrcholmi u a v existovali 2 rôzne cesty. Označme tieto cesty $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_m$ pričom platí $u = x_1 = y_1$ a $v = x_n = y_m$. Obe cesty majú spoločný začiatok (prinajmenšom 1 vrchol $u = x_1 = y_1$). Nech teda k je také číslo, že $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_k = y_k$, ale $x_{k+1} = y_{k+1}$. (Teda x_k je vrchol, kde sa cesty rozdelia.)

Obe cesty sa musia niekde opäť „stretnúť" – pretože majú spoločný posledný vrchol. Nech l je najmenšie číslo také, že $l > k$ a platí $x_l = y_l$.

Potom vrcholy $x_k, \ldots, x_l = y_l, y_{l-1}, \ldots, y_k = x_k$ tvoria kružnicu.

(iv)$\Rightarrow$ (i), (iv)$\Rightarrow$ (ii): Potrebujeme len ukázať, že graf na n vrcholoch bez kružníc, ktorý má $n-1$ hrán, je súvislý. Indukciou. Prípady $n = 1, 2$ sú opäť jasné.

Indukčný krok: Nech G má $n+1$ vrcholov, n hrán a nemá kružnice. Graf bez kružníc obsahuje vrchol stupňa najviac 1. Ak by v G bol vrchol stupňa 0, tak jeho vynechaním by sme dostali graf na n vrcholoch s n hranami bez kružníc, čo nemôže nastať podľa lemy 4.

Preto v G existuje vrchol stupňa 1. Jeho vynechaním dostaneme graf s n vrcholmi a $n-1$ hranami, ktorý opäť neobsahuje kružnice. Podľa indukčného predpokladu je tento graf súvislý. Teda aj graf G je súvislý.

(iii)$\Rightarrow$ (i) Pretože máme cestu medzi ľubovoľnými vrcholmi u, v, graf je súvislý. Keby mal kružnicu, mali by sme medzi 2 vrcholmi tejto kružnice aspoň 2 cesty.

(ii)$\Rightarrow$ (i) Chceme ukázať, že súvislý graf na n vrcholoch s $n-1$ hranami neobsahuje kružnice. Opäť indukciou, prípady $n = 1, 2$ sú ľahké.

Indukčný krok: Nech teraz G má $n+1$ vrcholov a n hrán. Podľa lemy 2 máme v G vrchol stupňa najviac 1. Pretože G je súvislý, nemôže sa tam vyskytnúť vrchol stupňa 0. To znamená, že v G máme vrchol stupňa 1. Jeho vynechaním dostaneme graf $G - \{u\}$ na n vrcholoch s $n-1$ hranami. Navyše $G - \{u\}$ je súvislý. Podľa indukčného predpokladu $G - \{u\}$ neobsahuje kružnice. Pridaním vrchola u však nemôžeme dostať kružnicu, pretože tento vrchol má stupeň 1 a každý vrchol v kružnici musí mať stupeň aspoň 2.

Úloha 2. Dokážte, že ak graf na n vrcholoch má aspoň $\binom{n-1}{2}+1$ hrán, tak je súvislý. Ukážte na príklade, že $\binom{n-1}{2}$ hrán nestačí.

Sporom. Predpokladajme, že graf by bol nesúvislý. Potom obsahuje aspoň 2 komponenty súvislosti, čiže vrcholy môžeme rozdeliť na 2 neprázdne časti, ktoré nespája žiadna hrana. Nech počet vrcholov v jednej časti je k, v druhej z nich potom musí byť $n-k$ vrcholov. Maximálny počet hrán je preto

$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2}.$$

Stačí nám teda ukázať, že pre ľubovoľné $k > 1$ platí

$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} \leq \binom{n-1}{2}.$$

Uvedomme si, že platí

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + (k-1).$$

Z toho máme

$$\begin{aligned}\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} =& 1 + 2 + \ldots + (k-1) + 1 + 2 + \ldots + (n-k-1) \leq \\ & 1 + 2 + \ldots + (k-1) + k + (k+1) + \ldots + (n-2) = \binom{n-1}{2}.\end{aligned}$$

Tým je vyriešená prvá časť úlohy. Príklad grafu na n vrcholoch, ktorý má $\binom{n-1}{2}$ hrán a nie je súvislý dostaneme tak, že ku K_{n-1} pridáme 1 izolovaný vrchol.