1 Rovinné grafy

Úloha 1. Ukážte, že všetky pravidelné konvexné mnohosteny sú: štvorsten, kocka, osemsten, dvanásťsten, dvadsaťsten.

Už sme si vysvetlili, že miesto mnohostenov sa môžeme zaoberať rovinnými grafmi.

Každý vrchol má rovnaký stupeň, označme ho d. Potom platí

$$2h = vd.$$

Podobne, každá stena nech má m hrán. Opäť z toho, že každá hrana patrí práve 2 stenám, dostaneme

$$2h = ms.$$

Potom z Eulerovej formuly máme

$$\begin{aligned} 2 = v - h + s &= \frac{2h}{d} - h + \frac{2h}{m} \\ \frac{2}{h} + 1 &= \frac{2}{d} + \frac{2}{m} \\ \frac{1}{h} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{d} + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Chceme nájsť všetky čísla, ktoré vyhovujú tejto rovnici. Má platiť

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2},$$

pričom súčasne vieme, že $d \geq 3$ a $m \geq 3$.

Dostávame tieto možnosti

d	m	h	v	s
3	3	6	4	4
3	4	12	8	6
3	5	30	20	12
4	3	12	6	8
5	3	30	12	20

Týmito hodnotami sú grafy už jednoznačne určené. Ak sa ich pokúsite nakresliť, dostanete práve grafy, ktoré sú uvedené na konci. (Dal som sem aj 3d-obrázky týchto telies.)[1]

Úloha 2. Pomocou Eulerovej formuly dokážte, že graf K_5 nie je rovinný.

Predpokladajme, že by graf K_5 bol rovinný. Pretože má $v = 5$ vrcholov a $h = 10$ hrán, jeho rovinné nakreslenie by malo

$$s = 2 + h - v = 7$$

oblastí. Ďalej si uvedomme, že každá oblasť musí byť ohraničená aspoň 3 hranami. Pretože každá hrana patrí práve 2 oblastiam, keď sčítame počet hrán pre jednotlivé oblasti, dostaneme dvojnásobok počtu hrán. Platí teda

$$2h \geq 3s.$$

[1] Pre geometrickú predstavivosť sú lepšie trojrozmerné obrázky. Ak však riešime úlohu, ktorá sa dá sformulovať pomocou grafov – napríklad hľadanie hamiltonovskej kružnice – je často jednoduchšie použiť rovinné nakreslenie grafu.

V našom prípade by sme dostali $20 \geq 21$, čo neplatí. Predpoklad, že K_5 je rovinný teda vedie k sporu.

Tiež si môžeme všimnúť, že ak vynecháme 1 hranu, tak máme $h = 9$, $s = 6$. Platí $2h = 3s$. Tento graf je skutočne rovinný – skúste si rozmyslieť ako nakresliť do roviny graf, ktorý vznikne vynechaním 1 hrany z K_5.

Úloha 3. Pomocou Eulerovej formuly dokážte, že graf $K_{3,3}$ nie je rovinný.

Pokúsime sa urobiť podobnú úvahu ako v predchádzajúcej úlohe. Pre graf $K_{3,3}$ dostávame hodnoty $v = 6$, $h = 9$, z čoho máme

$$s = 2 + h - v = 5.$$

Nerovnosť $2h \geq 3s$ je v tomto prípade splnená. Všimnime si však, že v $K_{3,3}$ neexistuje cyklus dĺžky 3 – najkratšia kružnica má dĺžku 4. Preto, ak by existovalo rovinné nakreslenie tohoto grafu, každá oblasť by bola ohraničená minimálne 4 hranami. Podobnou úvahou ako minule dostaneme

$$2h \geq 4s,$$

čo neplatí, lebo $2h = 18$ a $4s = 20$.

Takisto si môžeme všimnúť, že po vynechaní 1 hrany by sme dostali $v = 6$, $h = 8$, $s = 4$ a $2h = 4s$. Z toho síce ešte nevyplýva, že po vynechaní jednej hrany dostaneme rovinný graf.

Úloha 4. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!

a) Tento graf je inak nakreslený graf $K_{3,3}$. (Na obrázku dole vidno jeho ofarbenie dvomi farbami, je to teda skutočne bipartitný graf.)
b) Je rovinný – na ďalších obrázkoch sú 3 jeho rovinné nakreslenia. Môžeme si tiež všimnúť, že tento graf vznikol vynechaním jednej hrany z $K_{3,3}$.
c) Je rovinný – na obrázkoch dole sú jeho rovinné nakreslenia. Môžeme si všimnúť, že je to ten istý graf, ktorý dostaneme ako rovinné nakreslenie osemstenu.
d) Nie je rovinný. Obsahuje ako podgraf $K_{3,3}$. (Vynechaním 2 hrán dostaneme graf z úlohy a), o ktorom sme si už uvedomili, že je to $K_{3,3}$.)
e) Nie je rovinný. Môžeme to zdôvodniť viacerými spôsobmi: Obsahuje ako podgraf K_5. (Stačí vynechať spodný vrchol.) Obsahuje ako podgraf $K_{3,3}$. (Vynechaním niektorých hrán dostaneme graf z úlohy a).)

2 Platónovské telesá

Trojrozmerné obrázky, ktoré som tu použil, sú zo stránky `http://www.math.wichita.edu/history/topics/geometry.html`. Siete pravidelných mnohostenov môžete nájsť napríklad na stránke `http://www.wildfire.dircon.co.uk/nets.html` alebo na `http://www.yingster.net/projects/hedra/`.