1 Základné pojmy

Definícia 1. *Graf* je dvojica $G = (V, E)$, kde E sú dvojprvkové podmnožiny množiny V. Prvky množiny V nazývame *vrcholy* a prvky množiny E nazývame hrany.

Ak $u, v \in V$ a $\{u, v\} \in E$, tak hovoríme, že vrcholy u a v sú *susedné*. Počet vrcholov, ktoré susedia s u, sa nazýva *stupeň* vrchola u.

Postupnosť susedných vrcholov a hrán sa nazýva *sled*.
Ak sa neopakujú hrany – *ťah*.
Ak sa neopakujú vrcholy – *cesta*.
Uzavretý sled je sled, kde je prvý vrchol zhodný s posledným.
Uzavretý ťah je ťah, kde je prvý vrchol zhodný s posledným.
Kružnica (*cyklus*) je taká postupnosť vrcholov a hrán, kde sa sa neopakujú hrany s výnimkou prvého a posledného vrcholu (ktoré sú rovnaké) sa neopakujú ani vrcholy.

Definícia 2. Graf je *súvislý,* ak pre každú dvojicu vrcholov u a v existuje v tomto grafe cesta začínajúca vrcholom u a končiaca vo vrchole v.

Bez ohľadu na to, či graf je alebo nie je súvislý, existujú v ňom maximálne súvislé podgrafy. Tieto sa nazývajú *komponenty súvislosti.*

Strom je súvislý graf, ktorý neobsahuje kružnice.

Veta 3. *V lubovoľnom grafe $G = (V, E)$ je súčet stupňov vrcholov rovných dvojnásobku počtu hrán.*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

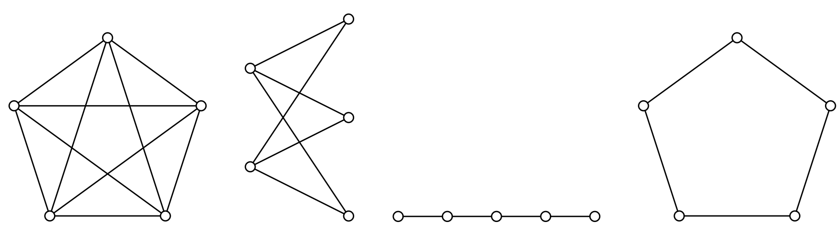
Definícia 4. Nech $G = (V, E)$ a $H = (V', E')$ sú grafy. Zobrazenie $f\colon V \to V'$ sa nazýva *izomorfizmus* grafov G a H, ak f je bijekcia a $\{u, v\} \in V \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$.

V prípade, že ide o izomorfizmus grafu samého na seba (teda ak $G = H$), hovoríme o *automorfizme* grafu G.

Príklady grafov: Kompletný graf na n vrcholoch je taký graf na n vrcholoch, kde je každý vrchol spojený s každým. Označujeme ho K_n.

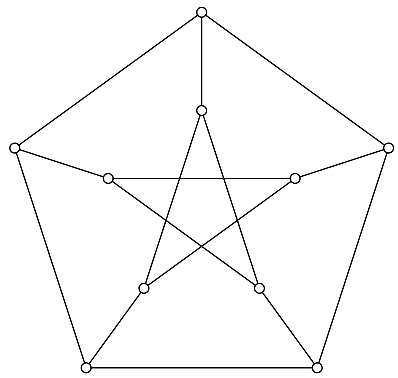
Kompletný bipartitný graf $K_{m,n}$ pozostáva z dvoch skupín vrcholov, prvá z nich má m vrcholov a druhá n vrcholov, pričom v rámci jednej skupiny neexistujú hrany a každý vrchol z jednej skupiny je spojený s každým vrcholom z druhej skupiny.

Graf P_n je graf pozostávajúci z n vrcholov $x_1, \ldots, x_n$ a hrán $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \ldots \{x_{n-1}, x_n\}$. Ak pridáme ešte hranu $\{x_n, x_1\}$, dostaneme C_n – kružnicu na n vrcholoch.



K_5 $K_{2,3}$ P_5 C_5

Často budeme používať aj Petersenov graf:



1. Ak v grafe G existuje sled z vrchola u do vrchola v, tak existuje aj cesta z u do v. (Návod: Dokázať, že najkratší sled je v skutočnosti cestou.)

2. Dokážte, že graf $G = (V, E)$ je súvislý $\Leftrightarrow$ pre každé $u, v \in V$ existuje sled z u do v $\Leftrightarrow$ pre každé $u, v \in V$ existuje ťah z u do v.

3. Ak graf na n vrcholoch je súvislý, tak má aspoň $n - 1$ hrán.

4. Ak graf na n vrcholoch neobsahuje kružnice, tak má najviac $n - 1$ hrán.

5. Ak graf má všetky vrcholy stupňa aspoň 2, tak obsahuje kružnicu. (Z toho dostávame, že ak nejaký graf neobsahuje kružnicu, tak musí obsahovať vrchol stupňa najviac 1. Špeciálne každý strom aspoň na 2 vrcholoch má vrchol stupňa 1.)

6. Dokážte: Graf G na n vrcholoch je strom $\Leftrightarrow$ je súvislý a má $n - 1$ hrán $\Leftrightarrow$ pre každé 2 vrcholy u a v grafu G existuje v G práve 1 cesta z u do v $\Leftrightarrow$ G neobsahuje kružnice a má $n - 1$ vrcholov.

7. Zistite či platí: Graf na n vrcholoch, ktorý má 2 vrcholy stupňa 1 je izomorfný s P_n? Skúste pridať nejaký predpoklad na graf G, aby to už platilo.

8. Dokážte, že ak graf na n vrcholoch má aspoň $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak je súvislý. Ukážte na príklade, že $\binom{n-1}{2}$ hrán nestačí.

9. Dokážte: Graf $G = (V, E)$ je súvislý práve vtedy, keď pre každý rozklad množiny vrcholov $V = V_1 \cup V_2$ na dve disjunktné množiny (teda $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) existuje hrana spájajúca nejaký vrchol z V_1 s nejakým vrcholom z V_2.

10. Ak graf G má n vrcholov a každý vrchol je stupňa aspoň $\frac{n-1}{2}$, tak G je súvislý.

11. Existuje graf, ktorý by mal práve 1 vrchol nepárneho stupňa?

12. Dokážte: Pre ľubovoľné 2 vrcholy u, v Petersenovho grafu existuje izomorfizmus f (Petersenovho grafu samého na seba) taký, že $f(u) = v$.

13. * Definujme graf G nasledovne. Nech $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Množinu vrcholov V budú tvoriť všetky dvojprvkové podmnožiny množiny M. Dva vrcholy $A, B \subseteq M$ budú spojené hranou ak $A \cap B = \emptyset$. Dokážte, že je to vlastne Petersenov graf (teda že je izomorfný s Petersenovým grafom). Vedeli by ste použiť tento popis na dôkaz toho, že
    a) pre ľubovoľné 2 vrcholy u a v existuje automorfimzus Petersenovho grafu taký, že

$f(u) = v$,
b) pre ľubovoľné 2 dvojice susedných vrcholov (u, v) a (u', v') existuje automorfimzus Petersenovho grafu také, že $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$,
c) pre ľubovoľné 2 dvojice nesusedných vrcholov (u, v) a (u', v') existuje automorfimzus Petersenovho grafu také, že $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$.

14. V každom grafe, ktorý má aspoň 2 vrcholy, existujú 2 (rôzne) vrcholy, ktoré majú rovnaký stupeň.

15. Nech P_1 a P_2 sú dve cesty maximálnej možnej dĺžky v grafe G. Dokážte, že P_1 a P_2 majú spoločný vrchol. Musia mať spoločnú hranu?

16. Sú grafy na nasledujúcich obrázkoch izomorfné s Petersenovým grafom? Ak áno, nájdite izomorfizmus.