

# 1 Hamiltonovské kružnice

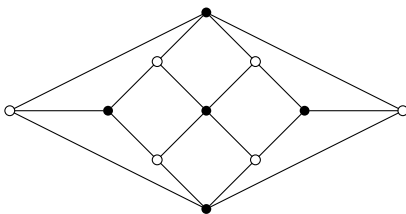
**Definícia 1.** *Hamiltonovská kružnica* je kružnica, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu. *Hamiltonovská cesta* je cesta, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu.

Graf, ktorý má hamiltonovskú kružnicu, voláme *hamiltonovský*.

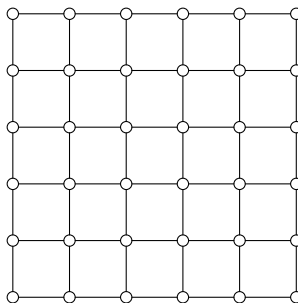
**Veta 2 (Ore).** *Nech  $G$  je graf na  $n \geq 3$  vrcholoch. Ak súčet stupňov každých 2 vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou, je aspoň  $n$ , tak  $G$  má hamiltonovskú kružnicu.*

**Dôsledok 3 (Dirac).** *Ak v grafe na  $n$  vrcholoch má každý vrchol stupeň aspoň  $\frac{n}{2}$ , tak  $G$  má hamiltonovskú kružnicu.*

1. Dokážte, že Petersenov graf nemá hamiltonovskú kružnicu.
2. Je graf na nasledujúcom obrázku hamiltonovský?



3. Nájsť hamiltonovskú kružnicu vo všetkých platónovských telesách. (Obrázky nájdete pri úlohách o rovinných grafoch.)
4. Bipartitný graf na párnom počte vrcholov nemá hamiltonovskú kružnicu.
5. Nájdite príklad grafu na  $n$  vrcholoch, v ktorom je súčet stupňov ľubovoľných 2 vrcholov aspoň  $n - 1$  ale tento graf nemá hamiltonovskú kružnicu.
6. Problém jazdca je úloha prejsť jazdcom všetky políčka na šachovnici, tak aby sa na každé dostal práve raz a skončil tam kde začal. Ako súvisí táto úloha s hamiltonovskými kružnicami? Skúste ju rozriešiť pre šachovnicu veľkosti  $3 \times 3$ , ktorá má vyrezané prostredné políčko, a šachovnicu veľkosti  $4 \times 4$ .
7. Pre aké  $m, n$  je komplettný bipartitný graf  $K_{m,n}$  Hamiltonovský?
8. Majme graf ktorý vznikne rozdelením štvorca na  $n^2$  menších štvorcov. (Na nasledujúcom obrázku je tento graf pre  $n = 6$ .)



Pre aké  $n$  má tento graf Hamiltonovskú kružnicu?

## 2 Rovinné grafy

Rovinný (planárny) graf je graf, ktorý možno nakresliť v rovine bez pretínania hrán.

Pre rovinné grafy platí Eulerova formula

$$v - h + s = 2,$$

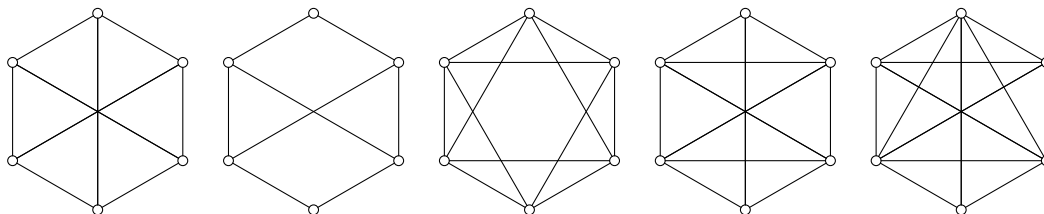
kde  $v$  je počet vrcholov,  $h$  je počet hrán a  $s$  je počet „stien“ resp. oblastí, na ktoré graf delí rovinu.

Z Eulerovej formuly sa dá odvodiť, že každý rovinný graf má vrchol stupňa najviac 5.

Platónovské telesá (pravidelné konvexné mnohosteny) sú také konvexné mnohosteny, v ktorých sú všetky steny, hrany a vrcholy „rovnaké“. Z toho špeciálne vyplýva, že steny sú pravidelné  $n$ -uholníky a každá stena má rovnaký počet vrcholov. Podobne každý vrchol patrí do rovnakého počtu stien.

Pretože konvexné mnohosteny si môžeme predstaviť aj ako rovinné grafy, môžeme ich skúmať ako pravidelné rovinné grafy (pod pravidelnými grafmi myslíme to, že každý vrchol má rovnaký stupeň a všetky oblasti sú ohraničené rovnakým počtom hrán). V prvej z nasledujúcich úloh si ukážeme, že každý z grafov zodpovedá niektorému z týchto telies: štvorsten, kocka, osemsten, dvanásťsten alebo dvadsaťsten.

1. Nájdite všetky platónovské telesá.
2. Pomocou Eulerovej formuly dokážte, že graf  $K_5$  nie je rovinný.
3. Pomocou Eulerovej formuly dokážte, že graf  $K_{3,3}$  nie je rovinný.
4. Nech  $G$  je ľubovoľný rovinný graf a  $H$  je jeho podgraf. Dokážte, že ak  $G$  je rovinný, tak aj  $H$  je rovinný.
5. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!



6. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!

