1. Nech A je konečná množina a $f\colon A \to A$ je zobrazenie. Dokážte:
   a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
   b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.

2. $M = \{1,2,3,4\}$. Vypočítajte: (1432)(1243)(4123). Určte inverznú permutáciu k výsledku.

3. Ak pre každý prvok x grupy $(G, \circ)$ platí $x \circ x = e$, tak táto grupa je komutatívna.

4*. Nech G je konečná množina a $\circ$ je binárna operácia na G taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že G je grupa.

5. Zistite, či množina $F = \{a + bi\sqrt{5}; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Q}\}$ s obvyklým sčitovaním a násobením tvorí pole.

6. Dokážte, že pre ľubovoľné prvky a, b poľa F a pre každé celé číslo m platí $a^m.a^n = a^{(m+n)}$.

7. Zistite, či $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, že pre ľubovoľné $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ a pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$ $r.(a,b) = (ra, 2rb)$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

8. Zistite, či $S = \{f\colon R \to R; f(x) = ax^2 + bx + c, a, b \in R\}$ je vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií. Ak áno, nájdite, $g_1, g_2, g_3 \in S$ také, že $S = [g_1, g_2, g_3]$.

9. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé vo vektorovom priestore R^3: (1,4,3), (1,3,2), (1,2,1).

10. Nech vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vektory nad poľom R. Sú aj vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + \ldots + n\vec{\alpha}_n$ lineárne nezávislé?

11. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v R^3:
    a) (1,2,3), (1,-2,3), (1,2,-3)
    b) (1,1,1), (1,1,0), (1,0,1)
    c) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1).

12. Overte, že množina $S = \{f\colon R \to R : (\exists a, b \in R)(\forall x \in R) f(x) = ax+b\}$ je podpriestor priestoru všetkých funkcií z R do R. Nájdite funkcie $g, h \in S$ také, že $S = [g, h]$.

13. Dokážte, že každá štvorcová matica sa dá napísať ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice. (Matica A je symetrická, ak $A = A^T$ a antisymetrická, ak $A = -A^T$.)

14. Určte dimenziu podpriestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$ priestoru R^4, ak $\vec{\alpha} = (1,3,2,1)$, $\vec{\beta} = (4,6,5,4)$ a $\vec{\gamma} = (2,0,1,2)$.

15. Určte hodnosť danej matice v závislosti od parametra $c \in R$:
    $\begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 4 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix}$

16*. Určte hodnosť matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

ak viete, že $a_1, \dots, a_{n+1}$ sú navzájom rôzne reálne čísla (t.j. $a_i \neq a_j$ pre všetky $i \neq j$).

17. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon (Z_7)^2 \to (Z_7)^2$ a napíšte jeho predpis.
a) $f(1,1) = (0,1)$, $f(6,1) = (3,2)$
b) $f(2,3) = (1,0)$, $f(3,2) = (6,1)$

18. Vyrátajte $E.A$ a $A.E$ pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ a a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Akým elementárnym riadkovým/stĺpcovým operáciam zodpovedajú jednotlivé matice E? (Vyberte si 2 zo 4 uvedených matíc.)

19. Zistite, či $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je regulárna a) nad Z_2 b) nad Z_3, ak áno, nájdite inverznú.

20. Riešte v Z_7 sústavu určenú maticou (každá za 0.5 bodu):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right)$$