Riadková ekvivalencia matíc, hodnosť matice

Definícia 1. *Podpriestorom prislúchajúcim matici* A typu $m \times n$ nad poľom F nazývame podpriestor priestoru F^n generovaný, riadkami matice A.

Aby sme rozumeli predchádzajúcej definícii, uvedomme si, že každý riadok matice je vlastne n-tica prvkov z F, čiže ho môžeme chápať ako vektor z F^n.

Ak matica A má riadky $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, tak je podpriestor prislúchajúci tejto matici vlastne $V_A = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m]$

Príklad 1. Pozrime sa na pár príkladov nad poľom $\mathbb{R}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad V_A = [(1,0,1),(0,1,1,)]$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V_I = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] = \mathbb{R}^3$

Vidíme, že matici I zodpovedá štandardná báza priestoru $\mathbb{R}^3$, preto jej prislúcha celý priestor $\mathbb{R}^3$.

Zavedieme si teraz úpravy, ktoré nám umožnia jednoduchšie popísať priestor prislúchajúci danej matici.

Definícia 2. *Elementárne riadkové operácie* na matici A nad poľom F sú:

1. výmena 2 riadkov matice,
2. vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom c poľa F,
3. pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku.

Hovoríme, že matice A a B sú *riadkovo ekvivalentné* ak maticu B možno z A dostať pomocou konečnej postupnosti elementárnych riadkových operácií. Ak matice A a B sú riadkovo ekvivalentné, zapisujeme to ako $A \sim B$.

Príklad 2. Nasledujúce matice sme dostali z prvej pomocou elementárnych riadkových operácií. Sú to teda riadkovo ekvivalentné matice.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(6)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Elementárne riadkové operácie, ktoré sme použili sú:
(1) k 2.riadku sme pripočítali (-2)-násobok prvého (inak povedané, odčítali sme dvojnásobok),
(2) od 3.riadku sme odčítali 3-násobok prvého,
(3) 2.riadok sme vynásobili $-\frac{1}{3}$, 3.riadok sme vynásobili $-\frac{1}{4}$,
(4) od 2.riadku sme odpočítali tretí,
(5) od prvého riadku sme odpočítali druhý,
(6) druhý riadok sme vynásobili $\frac{1}{2}$ (čiže sme vlastne ho vydelili 2).

Poznámka 1. Podobným spôsobom sa dajú definovať aj elementárne stĺpcové operácie.

Poznámka 2. Je zrejmé, že ak $A \sim B$ a $B \sim C$, tak platí aj $A \sim C$. (Postupnosťou elementárnych riadkových operácií vieme z A dostať najprv B a potom z B dostať C.)

Okrem toho elementárne riadkové operácie možno obrátiť, preto ak $A \sim B$, tak platí aj $B \sim A$.

(Nie je ťažké si uvedomiť, že ak B dostaneme s A výmenou 2 riadkov, tak výmenou tých istých riadkov dostaneme z matice B pôvodnú maticu A. Takisto, ak použijeme vynásobenie niektorého riadku prvkom $c \neq 0$ poľa F, tak pôvodnú maticu dostaneme tak, že tento riadok vynásobíme c^{-1}. Ak sme v matici B získali k-ty riadok pripočítaním c-násobku j-teho riadku, čiže k-ty riadok novej matice pomocou riadkov pôvodnej matice vieme vyjadriť ako $\vec{\alpha}_k + c\vec{\alpha}_j$, tak $(\vec{\alpha}_k + c\vec{\alpha}_j) - c\vec{\alpha}_j = \alpha_k$, čiže pripočítaním $(-c)$-násobku j-teho riadku ku k-temu dostaneme z B pôvodnú maticu.)

Veta 1. *Elementárne riadkové operácie nemenia podpriestor prislúchajúci danej matici. (Teda riadkovo ekvivalentným maticiam zodpovedá rovnaký podpriestor.)*

Dôkaz. Chceme ukázať, že ak na matici A, ktorej riadky sú $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, urobíme ktorúkoľvek z 3 elementárnych riadkových operácií, podpriestor prislúchajúci novej matici bude rovnaký ako podpriestor $V_A = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m]$.

V prípade výmeny 2 riadkov je to jasné – ak vektory napíšeme v inom poradí, tak vygenerujú ten istý podpriestor.

Ďalšou elemntárnou operáciou je vynásobenie niektorého riadku skalárom $c \neq 0$. Potom priestor prislúchajúci novej matici je $V_B = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{i-1}, c\vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_{i+1}, \dots, \vec{\alpha}_n]$. Pretože $c\vec{\alpha} \in V_A$, všetky vektory generujúce priestor V_B patria do V_A, preto tam patria aj všetky ich lineárne kombinácie, čo znamená $V_B \subseteq V_A$. Obrátenú inklúziu $V_A \subseteq V_B$ dostaneme rovnakým spôsobom: vektor $\vec{\alpha} = c^{-1}.(c\vec{\alpha})$ totiž patrí do V_B.

Zostáva nám posledná operácia – pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že sme pripočítavali c-násobok druhého riadku k prvému (vektory môžeme ľubovoľne preusporiadať bez toho, aby sme zmenili podpriestor, ktorý generujú). Chceme teda ukázať, že $V_A = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m] = [\vec{\alpha}_1 + c\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m] = V_B$. Každý z vektorov generujúcich V_B je lineárna kombinácia vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, preto platí $V_B \subseteq V_A = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m]$. Obrátene, vektor $\vec{\alpha}_1 = (\vec{\alpha}_1 + c\vec{\alpha}_2) - c\vec{\alpha}_2$ je lineárna kombinácia vektorov, ktoré generujú V_B, preto platí aj $V_A \subseteq V_B$. □

Definícia 3. Matica A je *redukovaná trojuholníková matica,* ak:

(i) Vedúci (=prvý nenulový) prvok každého riadku matice je 1.

(ii) Každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové.

(iii) Nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami.

(iv) Vedúci prvok ľubovoľného nenulového riadku je napravo od vedúcich prvkov všetkých nenulových riadkov pod ním a naľavo od vedúcich prvkov riadkov nad nám (t.j. vedúce riadky sú usporiadané zľava doprava).

Napríklad matica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ktorú sme dostali v príklade 2 je redukovaná trojuholníková matica.

Ľubovoľná redukovaná trojuholníková matica vyzerá zhruba takto:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

V predchádzajúcej schéme $*$ označuje miesta, kde môže byť ľubovoľný prvok (nulový alebo nenulový). Vidíme, že vedúce jednotky (vyznačené štvorčekom) idú zľava doprava

Veta 2. *Každá matica nad poľom F je riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou.*

Dôkaz. Nech A je matica typu $m \times n$.

Tvrdenie vety dokážeme indukciou vzhľadom na m – počet riadkov matice A.

Ak $m = 1$, tak máme jediný riadok. V prípade, že je tento riadok nulový, matica už je v redukovanom trojuholníkovom tvare. Ak nie, tak tento riadok má tvar $(0, \dots, 0, a_{1s}, a_{1,s+1}, \dots, a_{1n})$, kde a_{1s} je prvý nenulový prvok v danom riadku. Vynásobením a_{1s}^{-1} dostaneme maticu $(0, \dots, 0, 1, a_{1s}^{-1}a_{1,s+1}, \dots, a_{1s}^{-1}a_{1n})$, čiže vedúci prvok jej jediného riadku je 1 a táto matica je v redukovanom trojuholníkovom tvare.

Indukčný krok: predpokladáme, že tvrdenie vety platí pre každú maticu, ktorá má m riadkov, chceme dokázať, že platí aj pre ľubovoľnú maticu A typu $(m+1) \times n$.

Ak A je nulová matica, tak je v redukovanom trojuholníkovom tvare. V opačnom prípade, nech s je prvý stĺpec, ktorý je nenulový. Teda tento stĺpec obsahuje aspoň jeden nenulový prvok.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1s} & * & * & * & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{ks} \neq 0 & * & * & * & a_{ks} \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,s} & * & * & * & a_{ns} \end{pmatrix}$$

Výmenou riadkov vieme dostať maticu, ktorá má v s-tom stĺpci nenulový prvok už v prvom riadku. (Ak to spĺňa už pôvodná matica, nie je potrebné vymieňať riadky.)

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1s} \neq 0 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{2s} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{ks} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{m+1,s} & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Aby sme v prvom riadku dostali vedúcu jednotku, vynásobíme ho b_{1s}^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{2s} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{ks} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{m+1,s} & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Teraz vieme vynulovať všetky ostatné prvky v s-tom stĺpci – na to stačí od k-teho riadku (pre $k = 2, 3, \dots, m$) odpočítať b_{ks}-násobok prvého riadku.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2,s+1} & \dots & \dots & c_{2,n} \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{k,s+1} & \dots & \dots & c_{k,n} \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{m+1,s+1} & \dots & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$

Teraz nastala správna chvíľa použiť indukčný predpoklad – podľa neho vieme podmaticu pozostávajúcu zo všetkých riadkov predchádzajúcej matice okrem prvého upraviť na redukovanú trojuholníkovú maticu. Takto dostaneme maticu tvaru, ktorý schematicky znázorníme takto:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inak povedané, podmatica pozostávajúca z riadkov 2 až $m+1$ spĺňa definíciu redukovanej trojuholníkovej matice. Jediná podmienka, z definície redukovanej trojuholníkovej matice, ktorá môže byť narušená v celej matici je, že v niektorom zo stĺpcov obsahujúcich vedúcu jednotku môže táto matica obsahovať nenulový prvok. Pripočítaním vhodného násobku týchto riadkov vieme aj tieto prvky matice vynulovať. (Presnejšie to môžeme zapísať takto: označme prvky prvého riadku v $(s+1)$-vom až n-tom stĺpci. Nech stĺpce obsahujúce vedúce jednotky sú $i_2, i_3, \dots, i_k$. Potom od prvého riadku odpočítame c_{1,i_2}-násobok 2.riadku, c_{1,i_3}-násobok 3.riadku, atď.)

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z naznačených úprav je vidno, že výsledná matica je skutočne redukovaná trojuholníková matica. $\square$

Predchádzajúci dôkaz vlastne súčasne popisuje aj algoritmus, ako môžeme upraviť ľubovoľnú maticu na redukovaný trojuholníkový tvar.

Ako príklad úpravy na redukovanú trojuholníkovú maticu nám môže opäť poslúžiť príklad 2.

Zatiaľ sme si povedali, čo sú redukované trojuholníkové matice a vysvetlili sme si postup, akým môžeme z ľubovoľnej matice pomocou elementárnych riadkových úprav dostať redukovanú trojuholníkovú maticu. Teraz by sme chceli ukázať, prečo sú redukované trojuholníkové matice užitočné.

Veta 3. *Nenulové riadky redukovanej trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé.*

Najprv ilustrujme túto vetu na príklade. Opäť použijeme redukovanú trojuholníkovú maticu z príkladu 2.

Príklad 3. Riadky redukovanej trojuholníkovej matice z príkladu 2 sú $\vec{\alpha} = (1,0,2)$ a $\vec{\beta} = (0,1,\frac{3}{2})$. Rovnosť $c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} = \vec{0}$ znamená, že

$$c(1,0,2) + d(0,1,\frac{3}{2}) = (c,d,2c+\frac{3}{2}d) = (0,0,0),$$

z čoho dostaneme (porovnaním prvých 2 súradníc) $c = 0$ a $d = 0$. Platí teda implikácia $c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow c = d = 0$, čiže vektory $\vec{\alpha}$ a $\vec{\beta}$ sú lineárne nezávislé.

V nasledujúcom dôkaze postupujeme takmer identicky ako v príklade, ktorý sme práve uviedli.

Dôkaz. Nech $\vec{\alpha}_1,\dots,\vec{\alpha}_k$ sú nenulové riadky redukovanej trojuholníkovej matice A. Nech $i_1,\dots,i_k$ sú stĺpce s vedúcimi jednotkami.

Vektor $c_1\vec{\alpha}_1+\ldots+c_k\vec{\alpha}_k$ má na mieste i_k prvok c_i, takže rovnosť $c_1\vec{\alpha}_1+\ldots+c_k\vec{\alpha}_k = \vec{0}$ implikuje $c_i = 0$ (pretože nulový vektor má na tomto mieste nulu). Zistili sme, že platí $c_1\vec{\alpha}_1+\ldots+c_k\vec{\alpha}_k = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, čiže vektory $\vec{\alpha}_1,\dots,\vec{\alpha}_k$ sú skutočne lineárne nezávislé. □

Definícia 4. *Hodnosť matice* A je dimenzia priestoru V_A prislúchajúceho tejto matici. Označujeme ju $h(A)$.

Z tejto definície máme rovnosť $h(A) = d(V_A)$ a pretože elementárne riadkové operácie nemenia priestor prislúchajúci danej matice (veta 1), nemenia ani hodnosť matice.

Z vety 3 vyplýva, že hodnosť redukovanej trojuholníkovej matice je počet jej nenulových riadkov. Teda hodnosť matice môžeme rátať pomocou úpravy na redukovanú trojuholníkovú maticu. Pre maticu z príkladu 2 dostaneme $h(A) = 2$.

Okrem toho, že redukované trojuholníkové matice sú užitočné na výpočet hodnosti (a tým aj výpočet dimenzie podpriestu generovaného nejakými zadanými vektormi), dajú sa využiť aj na to, aby sme zistil, či nejaký vektor patrí do podpriestoru V_A.

Príklad 4. V príklade 2 sme ukázali, že matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sú riadkovo ekvivalentné čo znamená, že $V_A = V_B = [(1,0,2),(0,1,\frac{3}{2})]$.

Pokúsme sa zistiť, či vektor $\vec{\alpha} = (1,4,4)$ patrí do V_A. Ak to platí, musí byť tento vektorov lineárnou kombináciou vektorov $(1,0,2)$ a $(0,1,\frac{3}{2})$. Dostávame teda rovnosť

$$(1,4,4) = c_1(1,0,2) + c_2(0,1,\frac{3}{2}) = (c_1, c_2, 2c_1 + \frac{3}{2}c_2).$$

Porovnaním prvých dvoch súradníc dostaneme $c_1 = 1$ a $c_2 = 4$. Vektor na pravej strane poslednej rovnice má potom ale tretiu súradnicu rovnú $2.1 + \frac{3}{2}.4 = 8 \neq 4$, čiže vektor $\vec{\alpha}$ nepatrí do V_A.

Postup z predchádzajúceho príkladu sa dá použiť na dôkaz tohoto tvrdenia:

Lema 1. *Nech A je redukovaná trojuholníková matica typu $m \times n$ nad poľom F. Označme jej nenulové riadky $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ a ako $i_1, \dots, i_k$ označme čísla stĺpcov, v ktorých sú vedúce jednotky. Potom $\vec{\alpha} = (c_1, \dots, c_k) \in V_A$ práve vtedy, keď $\vec{\alpha} = c_{i_1}\vec{\alpha}_1 + c_{i_2}\vec{\alpha}_2 + \dots + c_{i_k}\vec{\alpha}_k$.*

Dôkaz. Ak $\vec{\alpha} \in V_A$, tak $\vec{\alpha}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$, čiže $\vec{\alpha} = d_1\vec{\alpha}_1 + \dots + d_k\vec{\alpha}_k$

Pozrime sa, aká je i_j-ta súradnica vektoru $\vec{\alpha} = d_1\vec{\alpha}_1 + \dots + d_k\vec{\alpha}_k$, pre ľubovoľné $j = 1, 2, \dots, k$. Na tejto zložke majú vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ nulu s výnimkou vektora α_j, ktorý tam má 1. Preto na i_j-tej súradnici vektora $d_1\vec{\alpha}_1 + \dots + d_k\vec{\alpha}_k$ je d_j, dostávame rovnosť $d_j = c_{i_j}$. Zistili sme, že koeficienty lineárnej kombinácie sú skutočne rovné $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k}$. □

Veta 4. *Ak A a B sú redukované trojuholníkové matice rovnakého typu $m \times n$ nad poľom F a $V_A = V_B$, tak $A = B$.*

Dôkaz. Aby sme ukázali, že 2 redukované trojuholníkové matice sa rovnajú, stačí dokázať, že vedúce jednotky sú v rovnakých stĺpcoch a v ostatných stĺpcoch obsahujú matice rovnaké prvky.

Pretože $h(A) = h(B)$, tieto matice majú rovnaký počet nenulových riadkov. Označme ho k. Nenulové riadky matice A označme $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ a $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ nech sú čísla stĺpcov, ktoré obsahujú vedúce jednotky. Podobne nenulové riadky matice B označme $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$ a nech vedúce jednotky tejto matice sú v stĺpcoch $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Postupujme sporom. Predpokladajme, že by vedúce jednotky neboli v rovnakých stĺpcoch. Nech t je prvý index, kde $i_t \neq j_t$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $i_t < j_t$. Vektor $\vec{\alpha}_t$ má na miestach $i_1, \dots, i_t$ nuly. Preto

$$\vec{\alpha}_t = 0\vec{\beta}_1 + \dots + 0\vec{\beta}_t + c_{t+1}\vec{\beta}_{t+1} + \dots + c_k\vec{\beta}_k.$$

Vektor na pravej strane tej to rovnosti má na prvých j_t miestach 0, čiže ju má aj na mieste i_t, čo je spor (keďže sa má rovnať vektoru $\vec{\alpha}_t$, ktorý tam má prvok 1).

Zistili sme, že predpoklad $i_t \neq j_t$ vedie k sporu, preto $i_t = j_t$.

Teraz stačí ukázať, že pre všetky $t = 1, 2, \dots, k$ platí $\vec{\alpha}_t = \vec{\beta}_t$ – to znamená, že aj ostatné prvky matíc A a B sa rovnajú.

Vektor $\vec{\alpha}_t$ má 0 na miestach $i_1, \dots, i_{t-1}$ aj $i_{t+1}, \dots, i_k$ a na mieste i_t má jednotku. Podľa lemy 1 teda $\vec{\alpha}_t = 0\vec{\beta}_1 + \dots + 0\vec{\beta}_{t-1} + 1\vec{\beta}_t + 0\vec{\beta}_{t+1} + 0\vec{\beta}_k$, čiže $\vec{\alpha}_t = \vec{\beta}_t$. □

Na získanie lepšieho porozumenia predchádzajúceho dôkazu je možno dobre si ukázať jeho najdôležitejší krok na konkrétnom príklade.

Príklad 5. Majme redukovanú trojuholníkovú maticu

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

ktorá má vedúce jednotky v prvom a treťom stĺpci.

Predpokladajme, že by existovala redukovaná trojuholníková matica taká, že $V_A = V_B$ ale táto matica by mala vedúce jednotky v prvom a štvrom stĺpci, čiže by mala tvar

$$B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{25} \end{smallmatrix}\right)$$

Potom by ale platílo $(0, 0, 0, 1, b_{25}) \in V_A = [(1, 1, 0, 2, 1), (0, 0, 1, 1, 2)]$. Podľa lemy 1 platí potom $(0, 0, 0, 1, b_{25}) = 0.(1, 1, 0, 2, 1) + 0.(0, 0, 1, 1, 2) = (0, 0, 0, 0, 0)$. Dostali sme teda rovnosť nulového a nenulového vektoru, čo je spor.

Predchádzajúce vety môžeme zhrnúť nasledovne.

Dôsledok 1. *Nech A a B sú matice typu $m \times n$ nad poľom F. Nasledovné podmienky sú ekvivalentné:*

(i) *A a B sú riadkovo ekvivalentné,*

(ii) *$V_A = V_B$,*

(iii) *A a B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou.*

Dôkaz. Veta 1 vlastne znamená implikáciu (i) $\Rightarrow$ (ii).

Podľa vety 2 je A riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou A' a B je ekvivalentná s redukovanou trojuholníkovou maticou B'. Pretože $V_{B'} = V_B = V_A = V_{A'}$, podľa vety 4 $A' = B'$. Tým je dokázaná implikácia (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Podľa poznámky 2, ak $A \sim T$ a $B \sim T$ (T je redukovaná trojuholníková matica), tak aj $A \sim B$. Teda platí aj implikácia (iii) $\Rightarrow$ (i). □