1 Jadro a obraz lineárneho zobrazenia

Definícia 1.1. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom *jadrom lineárneho zobrazenia* f nazývame množinu

$$\operatorname{Ker} f = \{\vec{\alpha} \in V; f(\vec{\alpha}) = \vec{0}\}$$

a *obrazom lineárneho zobrazenia* f nazývame množinu

$$\operatorname{Im} f = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in V\}.$$

Inými slovami, $\operatorname{Ker} f$ obsahuje práve tie vektory z V, ktoré sa zobrazia na nulový vektor a $\operatorname{Im} f$ obsahuje obrazy všetkých vektorov z V. Ľahko sa overí, že $\operatorname{Ker} f$ aj $\operatorname{Im} f$ sú vektorové podpriestory.

Tvrdenie 1.2. *Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom* $\operatorname{Ker} f$ *je vektorový podpriestor priestoru V a* $\operatorname{Im} f$ *je vektorovpodpriestor priestoru W.*

Dôkaz. Pretože $f(\vec{0}) = \vec{0}$, platí $\vec{0} \in \operatorname{Ker} f$, teda $\operatorname{Ker} f \neq \emptyset$.

Ak $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \operatorname{Ker} f$, znamená to, že $f(\vec{\alpha}) = f(\vec{\beta}) = \vec{0}$. Z linearity potom dostaneme

$$f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0},$$

čiže aj $\vec{\alpha} \in \operatorname{Ker} f$.

Podobne, ak $c \in F$ a $\vec{\in} \operatorname{Ker} f$, dostaneme

$$f(c.\vec{\alpha}) = c.f(\vec{\alpha}) = c.\vec{0} = \vec{0}$$

a $c.\vec{\alpha} \in \operatorname{Ker} f$.

Pretože $f(\vec{0}) = \vec{0}$, platí $\vec{0} \in \operatorname{Im} f$, teda $\operatorname{Im} f \neq \emptyset$.

Ak $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \operatorname{Im} f$, znamená to, že tieto vektory sú obrazmi nejakých vektorov z V, označme ich $\vec{\alpha}_1$ a $\vec{\beta}_1$. Máme teda

$$\begin{aligned} f(\vec{\alpha}_1) &= \vec{\alpha} \\ f(\vec{\beta}_1) &= \vec{\beta} \\ f(\vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1) &= \vec{\alpha} + \vec{\beta} \end{aligned}$$

Teda vektor $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ je obrazom vektora $\vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1$, čiže patrí do $\operatorname{Im} f$.

Podobne sa ukáže

$$c\vec{\alpha} = cf(\vec{\alpha}_1) = f(c\vec{\alpha}_1),$$

teda aj $c\vec{\alpha} \in \operatorname{Im} f$. □

Teraz si povieme, ako súvisí jadro a obraz lineárneho zobrazenia s tým, či je toto zobrazenie surjektívne alebo injektívne.

Tvrdenie 1.3. *Nech V s W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie.*

Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

Dôkaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Predpokladajme, že f je injektívne. Vieme, že $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Z injektívnosti vyplýva, že iný vektor sa už na nulový vektor nemôže zobraziť, preto $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nech $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$. Ak $f(\vec{\alpha}) = f(\vec{\beta})$, tak $f(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = \vec{0}$, čiže $\vec{\alpha}-\vec{\beta} \in \operatorname{Ker} f$. To ale znamená, že $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{0}$, a teda $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. □

Dôkaz nasledujúceho tvrdenia vynecháme, ide vlastne len o inak prepísanú definíciu surjektívnosti.

Tvrdenie 1.4. *Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie.*

Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = W$.

Dôsledok 1.5. *Lineárne zobrazenie $f\colon V \to W$ je izomorfizmus práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = W$ a $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.*

Veta 1.6. *Nech V a W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom*

$$d(V) = d(\operatorname{Ker} f) + d(\operatorname{Im} f).$$

Dôkaz. Nech $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k$ je báza $\operatorname{Ker} f$ (teda $d(\operatorname{Ker} f) = k$). Bázu $\operatorname{Ker} f$ vieme doplniť na bázu celého priestoru V vektormi $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_l$. (Teda $d(V) = k + l$.) Označme $S = [\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_l]$.

Definujme zobrazenie $g\colon S \to \operatorname{Im} f$ ako zúženie zobrazenia f, t.j. $g(\vec{\alpha}) = f(\vec{\alpha})$ pre všetky $\vec{\alpha} \in S$. Toto zobrazenie je surjektívne (pretože ako druhý priestor sme zobrali $\operatorname{Im} f$) aj injektívne (lebo $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \cap S = \{\vec{0}\}$). Je aj lineárne, teda ide o izomorfizmus. Izomorfizmus zachováva dimenziu (pretože zobrazuje bázu na bázu), teda máme

$$l = d(S) = d(\operatorname{Im} f)$$

a z toho dostaneme

$$d(V) = k + l = d(\operatorname{Ker} f) + d(\operatorname{Im} f).$$

□

2 Hodnosť transponovanej matice

Už sme si na prednáške jedným spôsobom ukázali, že $h(A) = h(A^T)$. Tu uvedieme dva ďalšie spôsoby. Prvý z nich bude využívať práve dokázanú vetu 1.6

Dôsledok 2.1. *Pre každú maticu nad poľom F platí $h(A) = h(A^T)$.*

Dôkaz. Ku matici A typu $m \times n$ prislúcha lineárne zobrazenie $f\colon F^m \to F^n$. Vieme, že toto zobrazenie je určené predpisom

$$f(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}A$$

(v predchádzajúcej rovnosti chápeme vektor $\vec{\alpha}$ ako maticu $1 \times m$, vďaka tomu môžeme lineárne zobrazenie zapísať pomocou násobenia matíc.)

Súčasne vieme, že podpriestor $\mathrm{Im}\, f$ je generovaný riadkami tejto matice. Preto $h(A) = d(\mathrm{Im}\, f)$.

Do $\mathrm{Ker}\, f$ patria práve vektory, pre ktoré platí

$$\vec{\alpha}A = \vec{0},$$

z čoho transponovaním dostávame

$$A\vec{\alpha}^T = \vec{0}^T,$$

teda sú to práve riešenia homogénneho systému s maticou A^T. Podľa jednej z viet na prednáške je dimenzia množiny riešení takéhoto systému rovná $m - h(A^T)$ (pretože počet stĺpcov matice A je m).

Z vety 1.6 potom dostaneme

$$m = m - h(A^T) + h(A),$$

z čoho vyplýva $h(A^T) = h(A)$. □

Uvedieme ešte jeden, pomerne jednoduchý dôkaz tejto vety.

Dôkaz. Dôkaz bude pozostávať z 2 častí: Najprv ukážeme, že táto veta platí pre redukované trojuholníkové matice. Ďalej si uvedomíne, že stĺpcové operácie nemenia hodnosť matice. Z toho už potom vyplynie tvrdenie vety.

Ak B je redukovaná trojuholníková matica typu $m \times n$ a $h(B) = k$, znamená to, že B má k-nenulových riadkov a navyše, má k stĺpcov, ktoré obsahujú jedinú (vedúcu) jednotku. Potom B^T je matica typu $n \times m$, v ktorej sú nenulové prvky iba v prvých k stĺpcoch a navyše obsahuje ako svoje riadky vektory $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ štandardnej bázy priestoru F^m (tieto riadky zodpovedajú tým stĺpcom pôvodnej matice, v ktorých boli vedúce jednotky). Z toho je zrejmé, že priestor V_{B^T} prislúchajúci tejto matici je generovaný vektormi $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ a teda $h(B^T) = d(V_{B^T}) = k = h(B)$.

Skúsme sa teraz zamyslieť nad tým ako menia dimenziu stĺpcové operácie. Každá stĺpcová operácia zodpovedá nejakému lineárnemu zobrazeniu $F^m \to F^m$ (vykonanie stĺpcovej operácie znamená zobrazenia každého riadku týmto zobrazením). Konkrétne, výmene dvoch stĺpco i-teho a j-teho stĺpca zodpovedá zobrazenie (pre $i < j$)

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

pripočítaniu c-násobku i-teho stĺpca k j-temu zodpovedá

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + cx_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

a vynásobeniu j-teho riadku konštantou $c \neq 0$ zodpovedá zobrazenie

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, cx_j, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Každé z týchto zobrazení je lineárne a navyše k nemu existuje inverzné (to vyplýva napríklad z toho, že stĺpcové operácie sú invertovateľné, ale dá sa to ľahko overiť aj priamo). Všetky takéto zobrazenia sú teda izomorfizmy.

Pretože stĺpcová úprava zodpovedá zobrazeniu podpriestoru prislúchajúceho danej matici nejakým izomorfizmom a izomorfizmus nemení dimenziu, je zrejmé, že stĺpcové operácie nemenia hodnosť matice.

Majme teraz maticu A. Matica A je riadkovo ekvivaletná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou B. Platí $h(A) = h(B) = h(B^T)$. Z matice B^T však vieme dostať maticu A^T pomocou elementárnych stĺpcových operácií. (Riadkové operácie na pôvodnej matici totiž zodpovedajú stĺpcovým operáciam na transponovanej matici.) Preto máme aj rovnosť $h(B^T) = h(A^T)$ a spojením týchto dvoch rovností dostaneme

$$h(A) = h(A^T).$$

□