1 Euklidovské vektorové priestory

1.1 Skalárny súčin

Skalárny súčin vektorov patriacich do $\mathbb{R}^2$ alebo $\mathbb{R}^3$ poznáte zo strednej školy. Tam ste skalárny súčin vektorov $\vec{\alpha} = (a_1, a_2)$ a $\vec{\beta} = (b_1, b_2)$ definovali ako

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

(Používali ste iné označenie pre skalárny súčin, ako budeme používať my.) Takisto ste sa na strednej škole naučili, ako súvisí skalárny súčin s veľkosťou vektora a uhlom, ktorý zvierajú 2 vektory:

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \cos \alpha,$$
$$|\vec{\alpha} =| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}.$$

My by sme teraz chceli zaviesť definíciu skalárneho súčinu o niečo všeobecnejšie – chceli by sme popísať, aké vlastnosti by mal mať skalárny súčin, aby sme pomocou neho mohli zmysluplne hovoriť o veľkosti alebo uhle vektorov z daného vektorového priestoru. Budeme opäť postupovať axiomaticky – zavedieme si niekoľko základných vlastností skalárneho súčinu, z ktorých sa budú dať odvodiť ostatné.

Definícia 1.1. Nech $(V, +, \cdot)$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$. Potom zobrazenie $g \colon V \times V \to \mathbb{R}$ sa nazýva *skalárny súčin* na V, ak pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a $c \in F$ platí

(i) $g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = g(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$,

(ii) $g(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + g(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$,

(iii) $g(c\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = cg(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$,

(iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $g(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) \neq 0$.

Vektorový priestor V spolu so skalárnym súčinom g nazývame *skalárnym vektorovým priestorom.*

Všimnite si, že skalárny súčin sme definovali iba pre vektorové priestory nad poľom $\mathbb{R}$.

Namiesto $g(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ budeme používať označenie $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$. Pri tomto označení uvedené vlastnosti môžeme prepísať nasledovne:

(i) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle$,

(ii) $\langle \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle) + \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle$,

(iii) $\langle c\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$,

(iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle \neq 0$.

Ak V je euklidovský vektorový priestor, tak aj každý jeho podpriestor je euklidovský priestor (s rovnako definovaným skalárnym súčinom).

Príklad 1.2. Zoberme si vektorový priestor $\mathbb{R}^n$ s obvyklým sčitovaním a skalárnym násobkom (po zložkách). Potom pre vektory $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_n)$ a $\vec{\beta} = (b_1, \dots, b_n)$ definujeme

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

V prípade $\mathbb{R}^2$ alebo $\mathbb{R}^3$ dostávame skalárny súčin ako ho poznáte zo strednej školy.

Vlastnosti z definície skalárneho súčinu sa overia pomerne jednoducho. Vlastnosť (i) je zrejmá. Vlastnosti (ii) a (iii) sa overia jednoduchou úpravou:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)c_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k c_k + b_k c_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k c_k + \sum_{k=1}^{n} b_k c_k,$$
$$\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Aby sme overili vlastnosť (iii), stačí si všimnúť, že

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Pretože $a_k^2 \geq 0$, aj skalárny súčin $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle \geq 0$ a rovný 0 bude iba v prípade, že všetky sčítance sú nulové, t.j. $a_k = 0$ pre každé k a $\vec{\alpha} = 0$.

Príklad 1.3. Definujme na $\mathbb{R}^2$ skalárny súčin nasledovne:

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2 a_2 b_2,$$

pre $\vec{\alpha} = (a_1, a_2)$ a $\vec{\beta} = (b_1, b_2)$. Vlastnosti (i)–(iii) sa overia ľahko. Vlastnosť (iv) vyplýva z toho, že

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle = a_1^2 + 2a_1 a_2 + 2a_2^2 = (a_1 + a_2)^2 + a_2^2,$$

čiže $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle = 0$ platí práve vtedy, keď $a_1 = 0$ a súčasne $a_1 + a_2 = 0$, teda $a_1 = a_2 = 0$, čiže $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Príklad 1.4. Postup z predchádzajúceho príkladu sa dá zovšobecniť. Všimnime si, že je to špeciálny prípad nasledujúceho zápisu:

$$g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (a_1 \dots a_n) C \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

kde C je matica typu $n \times n$. Takýto predpis priradí 2 vektorom $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_n), \vec{\beta} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ nejaké reálne číslo. Nie vždy to však bude skalárny súčin.

Všimnime si, že tento predpis môžeme zapísať aj takto:

$$g(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i c_{ij} b_j.$$

V prípade, že ide o symetrickú maticu, čiže $c_{ij} = c_{ji}$, ľahko zistíme, že je splnená podmienka (i). Podmienky (ii) a (iii) sú splnené pre ľubovoľnú maticu.

S podmienkou (iv) je to o niečo komplikovanejšie.

Príklad 1.5. Ako $C(a, b)$ označíme množinu všetkých spojitých funkcií $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Tieto funkcie tvoria vektorový podpriestor priestoru všetkých funkcií z $\langle a, b\rangle$ do $\mathbb{R}$ a predpis

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

definuje skalárny súčin na tomto priestore. (Takto by sme vedeli definovať skalárny súčin aj na podstatne väčšom priestore funkcií – stačilo by zvoliť nejaké podmienky, ktoré zaručia, že súčin $f(x)g(x)$ bude mať konečný integrál. Keď však použijem aj nespojité funkcie, budem mať problémy pri overovaní podmienky (iv). Pravdepodobne v niektorom z vyšších ročníkov sa na analýze stretnete s Fourierovými radmi, kde sa objaví tento istý skalárny súčin a dozviete sa tam aj ako sa to dá definovať tak, aby to fungovalo aj pre iné funkcie, niele spojité.)

Ak máme euklidovský vektorový priestor, tak môžeme prirodzeným spôsobom zadefinovať veľkosť vektora a uhol dvoch vektorov. Uvidíme, že takto zavedená veľkosť vektora spĺňa viaceré vlastnosti, ktoré platia pre veľkosť vektora v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

Definícia 1.6. Nech V je euklidovský vektorový priestor. Potom pre $\vec{\alpha} \in V$ definujeme veľkosť vektora $\vec{\alpha}$ ako

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha}\rangle}.$$

Všimnite si, že podmienka (iv) z definície skalárneho súčinu zaručí, že veľkosť je definovaná pre ľubovoľný vektor (nikdy v predpise pre $|\vec{\alpha}|$ nedostaneme odmocninu zo záporného čísla.)

Niekedy sa používa aj označenie $\|\vec{\alpha}\|$ (napríklad v [KGGS]).

Tvrdenie 1.7. *Nech V je euklidovský vektorový priestor. Pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a $c \in \mathbb{R}$ platí:*

(i) $|\vec{\alpha}| \geq 0$

(ii) $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$

(iii) $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$

(iv) $|\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (*Schwarzova nerovnosť*)

(v) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (*trojuholníková nerovnosť*)

Dôkaz. Vlastnosti (i), (ii), (iii) sa overia ľahko priamo z definície.

(iv) Dokážeme použitím vlastnosti (i) pre vektor $\vec{\alpha}+c\vec{\beta}$, kde c je ľubovoľné reálne číslo. Na základe vlastností skalárneho súčinu môžeme urobiť tieto úpravy:

$$|\vec{\alpha}+c\vec{\beta}|^2 = \langle\vec{\alpha}+c\vec{\beta},\vec{\alpha}+c\vec{\beta}\rangle = \langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle+2c\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle+c^2\langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle = |\vec{\alpha}|^2+2c\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle+c^2|\vec{\beta}|^2 \geq 0.$$

Pretože uvedená nerovnosť má platiť pre každé c a môžeme ju chápať ako kvadratickú nerovnicu s neznámou c, diskriminant tejto nerovnice musí byť nezáporný

$$D = 4\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle^2 - 4|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2 \leq 0.$$

Z tejto nerovnosti dostaneme

$$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle^2 \leq |\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2$$
$$|\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$$

(v) Pokúsme sa upraviť výraz $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2$. Platí

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = \langle\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}+\vec{\beta}\rangle = \langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle + 2\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle + \langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle =$$
$$|\vec{\alpha}|^2 + 2\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle + |\vec{\beta}|^2 \overset{(1)}{\leq} |\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + |\vec{\beta}|^2 = (|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2$$

(v nerovnosti (1) sme použili Schwarzovu nerovnosť (iv)). Z podslednej nerovnosti už vyplýva (v). □

Definícia 1.8. Nech V je euklidovský vektorový priestor.

Uhol dvoch nenulových vektorov definujeme ako taký uhol, pre ktorý platí

$$\cos\varphi = \frac{\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}.$$

V prípade, že niektorý z vektorov je nulový, položíme $\varphi = 0$.

Všimnite si, že vďaka Schwarzovej nerovnosti je výraz vystupujúci v definícii uhla dvoch vektorov z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, teda takýto uhol skutočne existuje.

Definícia 1.9. Vektory $\vec{\alpha},\vec{\beta} \in V$ nazveme *kolmé* (*ortogonálne*), ak $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = 0$.

O k-tici vektorov $\vec{\alpha}_1,\dots,\vec{\alpha}_k$ hovoríme, že tieto vektory sú ortogonálne, ak ľubovoľné 2 z nich sú ortogonálne, t.j. $\langle\vec{\alpha}_i,\vec{\alpha}_j\rangle = 0$ pre každé $i \neq j$.

Tvrdenie 1.10. *Nech V je euklidovský vektorový priestor. Ak nenulové vektory $\vec{\alpha}_1,\dots,\vec{\alpha}_k$ sú ortogonálne, tak sú lineárne nezávislé*

Dôkaz. Nech $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ sú také, že $c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_k\vec{\alpha}_k = \vec{0}$. Zoberme si ľubovoľné $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Potom dostaneme

$$0 = \langle \vec{\alpha}_i, 0 \rangle = \langle \vec{\alpha}_i, c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_k\vec{\alpha}_k \rangle = c_i|\vec{\alpha}_i|^2.$$

Táto rovnosť môže platiť jedine ak $\vec{\alpha}_i = \vec{0}$ alebo $c_i = 0$. Pretože $\vec{\alpha}_i \neq \vec{0}$, platí $c_i = 0$. Použitím rovnakej úvahy pre všetky $i = 1, 2, \dots, k$ dostaneme $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Teda dané vektory sú lineárne nezávislé. $\square$

Definícia 1.11. Nech V je euklidovský priestor a $M \subseteq V$. Potom

$$M^\perp = \{\alpha \in V; \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \text{ pre všetky} \beta \in M\}$$

sa nazýva *ortogonálny doplnok* množiny M.

Tvrdenie 1.12. *Nech V je euklidovský priestor a $M \subseteq V$. Potom $M^\perp$ je vektorový priestor priestoru V.*

Dôkaz. Zrejme $\vec{0} \in M^\perp$, preto $M^\perp$ je neprázdna množina.

Treba ešte overiť, že pre všetky $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in M^\perp$ a $c, d \in \mathbb{R}$ aj $c\vec{\alpha}_1 + d\vec{\alpha}_2 \in M^\perp$. Ak pre všetky $\vec{\beta} \in M$ platí $\langle \vec{\alpha}_1, \vec{\beta} \rangle = 0$ a $\langle \vec{\alpha}_2, \vec{\beta} \rangle = 0$, tak aj

$$\langle c\vec{\alpha}_1 + d\vec{\alpha}_2, \vec{\beta} \rangle = c\langle \vec{\alpha}_1, \vec{\beta} \rangle + d\langle \vec{\alpha}_2, \vec{\beta} \rangle = 0,$$

teda $c\vec{\alpha}_1 + d\vec{\alpha}_2 \in M^\perp$. $\square$

Tvrdenie 1.13. *Ak V je euklidovský priestor a $M \subseteq N \subseteq V$, tak*

$$N^\perp \subseteq M^\perp.$$

Dôkaz. Ak $\alpha \in N^\perp$, tak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0$ pre všetky vektory $\vec{\beta} \in N$. To ale znamená, že $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0$ platí aj pre všetky vektory $\vec{\beta} \in M$ (pretože $M \subseteq N$), a teda $N^\perp \subseteq M^\perp$. $\square$

Lema 1.14. *Nech V je euklidovský priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k \in V$. Nech $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k]$ je podpriestor vygenerovaný týmito vektormi. Potom $S^\perp = \{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k\}^\perp$.*

Dôkaz. Z toho, že $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k\} \subseteq S$ vyplýva inklúzia $S^\perp \subseteq \{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k\}^\perp$.

Naopak, nech $\vec{\beta} \in \{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k\}^\perp$. To znamená, že $\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha}_i \rangle = 0$ pre $i = 1, 2, \dots, k$. Potom $\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle = 0$ aj pre ľubovoľný vektor $\vec{\alpha} \in [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k]$, pretože každý vektor z tohoto podpriestoru má tvar $\alpha = c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_k\vec{\alpha}_k$ a

$$\langle \vec{\beta}, c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_k\vec{\alpha}_k \rangle = c_1\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha}_1 \rangle + \dots + c_k\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha}_k \rangle = 0.$$

$\square$

Tvrdenie 1.15. *Ak V je euklidovský priestor a S, T sú podpriestory V, tak*

$$(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp.$$

Dôkaz. Pretože $S \subseteq S + T$ aj $T \subseteq S + T$ máme $(S+T)^\perp \subseteq S^\perp$ a súčasne $(S+T)^\perp \subseteq T^\perp$, z čoho vyplýva

$$(S+T)^\perp \subseteq S^\perp \cap T^\perp.$$

Naopak, ak $\vec{\alpha} \in S^\perp \cap T^\perp$, tak $\vec{\alpha}$ je kolmé na ľubovoľný vektor z S aj na ľubovoľný vektor z T. Keždý vektor z $S + T$ sa dá zapísať v tvare $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$, kde $\vec{\beta} \in S$ a $\vec{\gamma} \in T$, takže potom platí

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} + \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle = 0,$$

teda α je kolmý na každý vektor z $S+T$, čiže patrí do $(S+T)^\perp$. Ukázali sme, že platí aj opačná inklúzia

$$S^\perp \cap T^\perp \subseteq (S+T)^\perp.$$

□

1.2 Gramm-Schmidtov ortogonalizačný proces

Definícia 1.16. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sa nazývajú *ortonormálne,* ak pre všetky i platí $|\vec{\alpha}_i| = 1$ a pre $i \neq j$ platí

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0.$$

Stručne povedané, sú to ortogonálne normované vektory (pod slovom „normované“ rozumieme, že ich veľkosť je 1).

Z tvrdenia 1.10 vyplýva, že ortonormálne vektory sú lineárne nezávislé. Ak ich teda bude dosť veľa (v prípade konečnorozmerného priestoru toľko, koľko je dimenzia priestoru), môžu tvoriť bázu.

Definícia 1.17. Ak vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú ortonormálne a tvoria bázu vektorového priestoru V, tak túto bázu nazývame *ortonormálna báza.*

Príklad 1.18. Najjednoduchší príklad je štandardná báze $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ v priestore $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

V takomto euklidovskom priestore majú všetky vektory $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ veľkosť každý z nich je kolmý na všetky ostatné.

Výhoda ortonormálnej bázy spočíva v tom, že ak máme 2 vektory vyjadrené pomocou ortonormálnej bázy veľmi ľahko vypočítame ich skalárny súčin – v podstate rovnako ako v predchádzajúcom príklade.

Majme $\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n$ a $\vec{\beta} = d_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + d_n\vec{\alpha}_n$, kde vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ tvoria ortonormálnu bázu. Potom

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle c_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n, d_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + d_n\vec{\alpha}_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i d_j \langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle.$$

Jediné nenulové členy v predchádzajúcej sume sú tie, kde $i = j$. Navyše vieme, že $\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_i \rangle = 1$. Dostaneme teda

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i.$$

Naším najbližším cieľom je ukázať ako z ľubovoľnej bázy v euklidovskom vektorovom priestore vieme dostať ortonormálnu bázu. Dôkaz nasledujúcej vety poskytuje jej konštrukciu, ktorá sa zvykne nazývať Gramm-Schmidtov ortogonalizačný proces.

Veta 1.19. *Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V. Potom existuje ortonormálna báza $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n$ priestoru V.*

Dôkaz. Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V. Najprv sa pokúsime nájsť takú bázu $\vec{\gamma}_1, \dots, \vec{\gamma}_n$ priestoru V, ktorej vektory sú ortogonálne.

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_1 =& \vec{\alpha}_1 \\
\vec{\gamma}_2 =& \vec{\alpha}_2 + c_{21}\vec{\gamma}_1 \\
\vec{\gamma}_3 =& \vec{\alpha}_3 + c_{31}\vec{\gamma}_1 + c_{32}\vec{\gamma}_2 \\
&\vdots \\
\vec{\gamma}_n =& \vec{\alpha}_n + c_{n1}\vec{\gamma}_1 + c_{n2}\vec{\gamma}_2 + \ldots + c_{n,n-1}\vec{\gamma}_{n-1}
\end{aligned}$$

Budeme postupovať indukciou. Prvý krok indukcie je jasný - stačí položiť $\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1$.

Predpokladajme teraz, že už sme našli k ortogonálnych vektorov $\vec{\gamma}_1, \dots, \vec{\gamma}_k$, ktoré majú uvedený tvar. Navyše platí

$$[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k] = [\vec{\gamma}_1, \dots, \vec{\gamma}_k].$$

Chceli by sme nájsť vektor $\vec{\gamma}_{k+1}$ kolmý na všetky predchádzajúce, ktorý by mal navyše tvar

$$\vec{\gamma}_{k+1} = \vec{\alpha}_{k+1} + c_{k1}\vec{\gamma}_1 + c_{k2}\vec{\gamma}_2 + \ldots + c_{k+1,k}\vec{\gamma}_k$$

a súčasne taký, aby platilo

$$[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{k+1}] = [\vec{\gamma}_1, \dots, \vec{\gamma}_{k+1}].$$

Ak má byť tento vektor kolmý na predchádzajúce, musia platiť rovnosti

$$\begin{aligned}
0 = \langle \vec{\gamma}_{k+1}, \vec{\gamma}_1 \rangle =& \langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_1 \rangle + c_{k+1,1} \langle \vec{\gamma}_k, \vec{\gamma}_1 \rangle \\
0 = \langle \vec{\gamma}_{k+1}, \vec{\gamma}_2 \rangle =& \langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_2 \rangle + c_{k+1,2} \langle \vec{\gamma}_k, \vec{\gamma}_1 \rangle \\
0 = \langle \vec{\gamma}_{k+1}, \vec{\gamma}_3 \rangle =& \langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_3 \rangle + c_{k+1,3} \langle \vec{\gamma}_k, \vec{\gamma}_1 \rangle \\
&\vdots \\
0 = \langle \vec{\gamma}_{k+1}, \vec{\gamma}_k \rangle =& \langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_k \rangle + c_{k+1,k} \langle \vec{\gamma}_k, \vec{\gamma}_1 \rangle
\end{aligned} \qquad (1) \quad \{\texttt{EQGAMMAK}\}$$

(V každej rovnici sme vynechali všetky členy obsahujúce $\langle \vec{\gamma}_i, \vec{\gamma}_j \rangle$ pre $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, pretože podľa indukčného predpokladu sú tieto hodnoty nulové.) Z predchádzajúcich rovníc môžeme vyjadriť všetky koeficienty $c_{k+1,i}$:

$$c_{k+1,i} = -\frac{\langle \vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_i \rangle}{\langle \vec{\gamma}_k, \vec{\gamma}_1 \rangle}$$

pre každé $i = 1, 2, \ldots, k$.

Z rovníc (1) vidno, že pre takéto hodnoty $c_{k+1,i}$ bude vektor $\vec{\gamma}_{k+1}$ skutočne kolmý na všetky predchádzajúce vektory.

Ďalej vieme, že $\vec{\alpha}_{k+1} \notin [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k] = [\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_k]$ (lebo vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé). Teda aj $\vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_k$ sú lineárne nezávislé, čiže ich lineárnou kombináciou nemôžeme dostať $\vec{0}$. Pretože $\vec{\gamma}_{k+1} = \vec{\alpha}_{k+1} + c_{k1}\vec{\gamma}_1 + c_{k2}\vec{\gamma}_2 + \ldots + c_{k+1,k}\vec{\gamma}_k$ je lineárna kombinácia týchto vektorov a koeficient pri $\vec{\alpha}_{k+1}$ je $1 \neq 0$. Z toho vyplýva, že $\vec{\gamma}_{k+1} \neq \vec{0}$.

Súčasne platí $\vec{\gamma}_{k+1} \in [\vec{\alpha}_{k+1}, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_k] = [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_{k+1}]$. Teda $[\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_{k+1}] \subseteq [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_{k+1}]$.

Ďalej $\vec{\alpha}_{k+1} = \vec{\gamma}_{k+1} - (c_{k1}\vec{\gamma}_1 + c_{k2}\vec{\gamma}_2 + \ldots + c_{k+1,k}\vec{\gamma}_k)$ je lineárna kombinácia vektorov $\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_{k+1}$, čiže platí aj obrátená inklúzia $[\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_{k+1}] \subseteq [\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_{k+1}]$.

Takto sme dostali bázu priestoru V, ktorej vektory sú ortogonálne. Aby boli ortonormálne, potrebujeme, každý z nich vydeliť jeho veľkosťou, čiže ortonormálnu bázu dostaneme tak, že položíme

$$\vec{\beta}_i = \frac{\vec{\gamma}_i}{|\vec{\gamma}_i|}.$$

□

Príklad 1.20. Zoberme si priestor $V = [(1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 2, 1, 3)]$. Ľahko sa overí, že tieto vektory sú lineárne nezávislé, teda tvoria bázu priestoru V. Pomocou Gramm-Schmidtovho procesu nájdeme ortogonálnu bázu pre V. Položíme

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1 = (1, 0, 1, 0).$$

Ďalej chcem nájsť vektor $\vec{\gamma}_2 = \vec{\alpha}_2 + c\vec{\gamma}_1 = (0, 2, -1, 1) + c(1, 0, 1, 0) = (c, 2, c - 1, 1)$ tak, aby bol kolmý na $\vec{\gamma}_1 = (1, 0, 1, 0)$. Dostávame teda rovnosť

$$\langle (c, 2, c - 1, c + 1), (1, 0, 1, 0) \rangle = c + c - 1 = 2c - 1 = 0,$$

z ktorej vyplýva $c = \frac{1}{2}$ a $\vec{\gamma}_2 = (\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1)$.

Tretí vektor $\vec{\gamma}_3$ hľadáme v tvare $\vec{\gamma}_3 = \vec{\alpha}_3 + d\vec{\gamma}_1 + e\vec{\gamma}_3$ tak, aby

$$\langle \vec{\gamma}_3, \vec{\gamma}_1 \rangle = \langle \vec{\alpha}_3, \vec{\gamma}_1 \rangle + d\langle \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_1 \rangle = 0$$
$$\langle \vec{\gamma}_3, \vec{\gamma}_2 \rangle = \langle \vec{\alpha}_3, \vec{\gamma}_2 \rangle + e\langle \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_2 \rangle = 0$$

z čoho

$$d = -\frac{\langle \vec{\alpha}_3, \vec{\gamma}_1 \rangle}{\langle \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_1 \rangle}$$
$$e = -\frac{\langle \vec{\alpha}_3, \vec{\gamma}_2 \rangle}{\langle \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_2 \rangle}$$

Keď vypočítame $\langle \vec{\alpha}_3, \vec{\gamma}_1 \rangle = -1$, $\langle \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_1 \rangle = 2$, $\langle \vec{\alpha}_3, \vec{\gamma}_2 \rangle = \frac{13}{2}$ a $\langle \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_2 \rangle = \frac{11}{2}$, dostaneme

$$d = \frac{1}{2}$$
$$e = -\frac{13}{11}$$
$$\vec{\gamma}_3 = \vec{\alpha}_3 - \frac{1}{2}\vec{\gamma}_1 - \frac{13}{11}\vec{\gamma}_2$$
$$\vec{\gamma}_3 = \left(-\frac{12}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{20}{11}\right)$$

Zatiaľ sme teda dostali ortogonálne vektory, ktoré generujú V. Aby sme z nich dostali ortonormálne, musíme ich predeliť veľkosťou. Platí

$$|\vec{\gamma}_1| = \sqrt{2}$$
$$|\vec{\gamma}_2| = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$$
$$|\vec{\gamma}_3| = \frac{\sqrt{672}}{11} = \frac{4\sqrt{41}}{11}$$

a teda ortonormálna báza priestoru V je

$$\vec{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$$
$$\vec{\beta}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1)$$
$$\vec{\beta}_3 = \frac{11}{4\sqrt{41}}\left(-\frac{12}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{20}{11}\right) = \frac{1}{4\sqrt{41}}(-12, -4, 12, 20) = \frac{1}{\sqrt{41}}(-3, -1, 3, 5).$$

Vidíme, že vektory, ktoré sme dostali vyzerajú pomerne zložito. Nevedeli by sme si nejako zjednodušiť tieto výpočty? Možnože keby sme mali bázové vektory pôvodnej bázy o niečo jednoduchšie, aj ortonormálna báza by vyšla jednoduchšia. Ale dostať „peknú“ bázu vieme – to sa dá urobiť pomocou elementárnych riadkových operácií. Takže skúsme ešte takýto postup – vypočítajme najprv jednoduchšiu bázu pre priestor V.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vidíme teda, že $V = [(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)]$, čiže tentokrát ako štartovací bod pre Gramm-Schmidtovu ortogonalizáciu použijeme bázové vektory $\vec{\alpha}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{\alpha}_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\vec{\alpha}_3 = (0, 0, 1, 1)$. (Dúfam, že Vás nebude príliš pliesť, že tentokrát sme ako $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$ a $\vec{\alpha}_3$ označili úplne iné vektory ako v prvej časti príkladu. Dôvod nie je ten, že by sme mali príliš málo gréckych písmeniek, ale ten, že som chcel aby sa označenie zhodovalo s označením použitým v predchádzajúcom dôkaze.)

Opäť dostaneme:

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1 = (1, 0, 0, -1).$$

Vektor $\vec{\gamma}_2$ hľadáme v tvare $\vec{\alpha}_2 + c\vec{\gamma}_1$ a z podmienky, že $\langle\vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_1\rangle = 0$ nám vyjde, že

$$c = -\frac{\langle\vec{\gamma}_1, \vec{\alpha}_2\rangle}{\langle\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_1\rangle} = -\frac{-1}{2}$$

$$\vec{\gamma}_2 = (0, 1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Ďalej hľadáme $\vec{\gamma}_3$ v tvare $\vec{\gamma}_3 = \vec{\alpha}_3 + d\vec{\gamma}_1 + e\vec{\gamma}_1$. Koeficienty e a f opäť určíme z podmienok ortogonality.

$$d = -\frac{\langle\vec{\alpha}_3, \vec{\gamma}_1\rangle}{\langle\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_1\rangle} = \frac{1}{2}$$

$$e = -\frac{\langle\vec{\alpha}_3, \vec{\gamma}_2\rangle}{\langle\vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_2\rangle} = -\frac{1}{3}$$

$$\vec{\gamma}_3 = (0, 0, 1, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, 0, -1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

Teraz už zostáva len každý vektor predeliť jeho veľkosťou.

$$\vec{\beta}_1 = \frac{\vec{\gamma}_1}{|\vec{\gamma}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$$

$$\vec{\beta}_2 = \frac{\vec{\gamma}_2}{|\vec{\gamma}_2|} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{\beta}_3 = \frac{\vec{\gamma}_3}{|\vec{\gamma}_3|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

Cvičenia

Úloha 1. Nájdite bázu a dimenziu $S^\perp$ pre daný podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^4$:
a) $S = [(1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)]$
b) $S = [(1, 5, 4, 3), (2, -1, 2, -1)]$
c) $S = [(1, 2, 1, 1), (2, 1, -1, -1)]$
d) $S = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1)]$
e) $S = [(2, 1, 2, 3), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 2, 1)]$
f) $S = [(1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 1)]$

Úloha 2. Zistite, či daný predpis určuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$. Nech $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$.

a) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 - a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + 3a_2b_2 - a_3b_3$
b) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$
c) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = 3a_1b_2 + 2a_2b_2 + a_3b_3$
d) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
e) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$
f) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
g) $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
h)$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = a_1b_2 + a_2b_1$
i)$\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = 3a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_3b_3$

Úloha 3. Zistite, či $\sin\pi x$ a $\cos\pi x$ sú kolmé v priestore $C(0,1)$ so skalárnym súčinom z príkladu 1.5. Akú majú tieto vektory veľkosť?

Úloha 4. Nájdite ortonormálnu bázu pre priestory z úlohy 1.

Literatúra

[KGGS] T. Katriňák, M. Gavalec, M. Gedeonová, and J. Smítal. *Algebra a teoretická aritmetika 1.* UK, Bratislava, 2002.