Lineárne a direktné súčty podpriestorov

Už vieme, že prienik podpriestorov vektorového priestoru je tiež podpriestor. Ako je to so zjednotením? Ak si zvolíme podpriestory $S = [(1,0,0)]$ a $T = [(0,1,0)]$ priestoru R^3, tak vidíme, že $S \cup T$ nie je vektorový podpriestor, lebo $(1,0,0) \in S \cup T$, $(0,1,0) \in S \cup T$, ale $(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0) \notin S \cup T$.

Zaujímalo by nás, ako vyzerá najmenší podpriestor, ktorý obsahuje S aj T. Keď si nakreslíte obrázok, zistíte, že v tomto prípade je to podpriestor $[(1,0,0),(0,1,0)]$. Ukážeme si, ako možno nájsť takýto podpriestor vo všeobecnosti, pre ľubovoľné dva podpriestory daného vektorového priestoru V.

Veta 1. *Nech S, T sú vektorové podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F. Potom*

$$S + T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\alpha} \in S, \vec{\beta} \in T\}$$

je podpriestorom vektorového priestoru V.

Táto veta vlastne hovorí, že množina všetkých vektorov, ktoré sa dajú získať ako súčet jedného vektora z S a jedného vektora z T, tvorí vektorový podpriestor. Všimnite si, že v predchádzajúcom príklade bolo $S+T = [(1,0,0),(0,1,0)]$.

Dôkaz. Overíme podmienky z definície vektorového podpriestoru. Množina $S+T$ je *neprázdna,* lebo $\vec{0} \in S$, $\vec{0} \in T$, čiže $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in S + T$.

$S + T$ je uzavretá na súčty: Ak $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2 \in S + T$, tak vektory $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$ sa dajú napísať v tvare $\vec{\gamma}_1 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1$, $\vec{\gamma}_2 = \vec{\alpha}_2 + \vec{\beta}_2$, kde $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in S$ a $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \in T$. Potom $\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 = (\vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1) + (\vec{\alpha}_2 + \vec{\beta}_2) = (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) + (\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2)$. (Využili sme komutatívnosť a asociatívnosť sčitovania.) Pretože S je vektorový podpriestor vektor $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$ patrí do S, podobne $\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \in T$. Ukázali sme, že vektor $\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$ sa dá napísať ako súčet vektora z S a vektora z T, teda $\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 \in S + T$.

$S + T$ je uzavretá na násobenie skalárom: Ak $\vec{\gamma} \in S + T$, tak $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ pre nejaké $\vec{\alpha} \in S$ a $\vec{\beta} \in T$. Nech $c \in F$ je ľubovoľný skalár. Potom $c\vec{\gamma} = c\vec{\alpha} + c\vec{\beta}$. Pritom $c\vec{\alpha} \in S$, $c\vec{\beta} \in T$, čiže $c\vec{\gamma} \in S + T$. $\square$

Definícia 1. Ak S, T sú podpriestory vektorového podpriestoru V, tak vektorový podpriestor $S + T$ sa nazýva *lineárny súčet* podpriestorov S a T.

Vidno, že S aj T sú podmnožiny $S+T$, čiže $S+T$ obsahuje oba podpriestory S aj T. ($\vec{\alpha} \in S \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\alpha} + \vec{0} \in S+T$, podobne pre T.) Priestor $S+T$ je skutočne najmenší vektorový podpriestor priestoru V, ktorý obsahuje S aj T. Ak totiž $S, T \subseteq U$ a U je vektorový podpriestor V, tak U musí obsahovať všetky súčty tvaru $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, pretože $\vec{\alpha} \in S \subseteq S + T$ a $\vec{\beta} \in T \subseteq S + T$.

Veta 2. *Nech S a T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F. Nech $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$, $T = [\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$. Potom $S + T = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$.*

Dôkaz. Je zrejmé, že vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$ patria do $S+T$. Keďže $S+T$ je vektorový podpriestor, musí potom platiť $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m] \subseteq S + T$.

Ešte treba dokázať opačnú inklúziu, čiže chceme ukázať, že $\vec{\gamma} \in S + T \Rightarrow \vec{\gamma} \in [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$. Ak $\vec{\gamma} \in S + T$, tak $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, kde $\vec{\alpha} \in [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$

a $\vec{\beta} \in [\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_m]$. To znamená, že existujú $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_m \in F$ tak, že $\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n$ a $\vec{\beta} = d_1\vec{\beta}_1 + \ldots + d_m\vec{\beta}_m$. Potom $\vec{\gamma} = c_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n + d_1\vec{\beta}_1 + \ldots + d_m\vec{\beta}_m$, čiže $\vec{\gamma} \in [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_m]$. □

Veta 3. *Nech S, T sú podpriestory konečnorozmerného priestoru V. Potom*[1]

$$d(S) + d(T) = d(S + T) + d(S \cap T).$$

Dôkaz. Zo Steinitzovej vety vyplýva, že každý podpriestor konečnorozmerného priestoru je tiež konečnorozmerný, teda všetky dimenzie, ktoré vystupujú vo vete, sú skutočne definované.

V prípade, že $S \subseteq T$ máme $S + T = T$ a $S \cap T = S$, z čoho je zrejmé, že tvrdenie vety platí. Prípad $T \subseteq S$ je symetrický.

Zostáva teda prípad, že $S \nsubseteq T$ a $T \nsubseteq S$. Môžeme potom predpokladať, že $S \cap T$ má bázu $\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_r$. (V prípade, že $S \cap T = \{\vec{0}\}$, tak tento podpriestor nemá bázu – vtedy stačí zobrať $r = 0$ a vo zvyšku dôkazu môžeme postupovať úplne rovnako.) Tieto vektory patria do priestoru S a sú lineárne nezávislé, preto ich možno doplniť na bázu priestoru S, čiže $S = [\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_r, \vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_s]$. Podobne môžeme v T zvoliť bázu $\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_r, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_t$. Podľa vety 2 dostaneme

$$S + T = [\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_r, \vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_t].$$

Stačí, ak dokážeme, že tieto vektory sú lineárne nezávislé, lebo potom tvoria bázu v $S + T$ a máme $d(S + T) + d(S \cap T) = r + s + r + t = (r + s) + (r + t) = d(S) + d(T)$.

Nech $c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_r\vec{\gamma}_r + d_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + d_s\vec{\alpha}_s + e_1\vec{\beta}_1 + \ldots + e_t\vec{\beta}_t = \vec{0}$. Potom $\vec{\delta} = c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_r\vec{\gamma}_r + d_1\vec{\alpha}_1 + \ldots + d_s\vec{\alpha}_s = -e_1\vec{\beta}_1 + \ldots + -e_t\vec{\beta}_t$ patrí do podpriestoru $S \cap T$. (Patrí do S, lebo je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_r, \vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_s$. Do T patrí preto, že je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_t$.) Teda $\vec{\delta} = c'_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c'_2\vec{\gamma}_r$. Vďaka tomu, že vyjadrenie vektora pomocou prvkov bázy je jednoznačné, dostaneme, že $d_1 = \ldots = d_s = 0$ a $e_1 = \ldots = e_t = 0$. Potom máme $c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_r\vec{\gamma}_r = \vec{0}$ a (pretože $\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_r$ je báza) $c_1 = \ldots = c_r = 0$. □

Definícia 2. Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F a nech $S \cap T = \{\vec{0}\}$. Potom podpriestor $S + T$ nazývame *direktný (priamy) súčet* podpriestorov S a T a označujeme ho $S \oplus T$.

Veta 4. *Nech S, T, P sú podpriestory konečnorozmerného vektorového priestoru V nad poľom F. Tieto podmienky sú potom ekvivalentné:*

(i) $P = S \oplus T$

(ii) $P = S + T$ *a* $d(P) = d(S) + d(T)$

(iii) Ak $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ je báza podpriestoru S a $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_m$ je báza podpriestoru T, tak $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_m$ je báza podpriestoru P.

[1] Tento vzorec pripomína vzorec pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$.

(iv) $P = S + T$ *a každý vektor* $\vec{\gamma} \in P$ *sa dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare* $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$*, kde* $\vec{\alpha} \in S$ *a* $\vec{\beta} \in T$*. (T.j. ak* $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1$*, pričom* $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in S$ *a* $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \in T$*, tak* $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2$ *a* $\vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_2$*.)*

Dôkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Podľa vety 3 dostaneme $d(S)+d(T) = d(S+T)+d(S\cap T) = d(P) + d(\{\vec{0}\}) = d(P)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Podľa vety 2 je $S+T = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$. Pretože $d(P) = n+m$ a našli sme $n+m$ vektorov, ktoré sú ho generujú, musia byť tieto vektory lineárne nezávislé a tvoria bázu.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Z vety 2 vyplýva, že $S + T = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$, teda $P = S+T$. Nech $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{\alpha}'+\vec{\beta}'$. Potom $\vec{\alpha}-\vec{\alpha}'+\vec{\beta}-\vec{\beta}' = \vec{0}$. Ak vyjadríme vektory $\vec{\alpha}-\vec{\alpha}' \in S$ a $\vec{\beta}-\vec{\beta}' \in T$ pomocou báz týchto podpriestorov, dostaneme $c_1\vec{\alpha}_1+\ldots+c_n\vec{\alpha}_n+d_1\vec{\beta}_1+\ldots+d_m\vec{\beta}_m = \vec{0}$. Pretože vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$ tvoria bázu v P, sú lineárne nezávislé a $c_1 = \ldots = c_n = d_1 = \ldots = d_m = 0$. Z toho vyplýva, že $\vec{\alpha}-\vec{\alpha}' = \vec{0}$ a $\vec{\beta}-\vec{\beta}' = \vec{0}$, čiže $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}'$ a $\vec{\beta} = \vec{\beta}'$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Potrebujeme ukázať iba že $S \cap T = \{\vec{0}\}$. Ak $\vec{\gamma} \in S \cap T$, tak $\vec{\gamma}$ môžeme vyjadriť ako súčet vektora z S a vektora z T týmito dvoma spôsobmi: $\vec{\gamma} = \vec{\gamma} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{\gamma}$. Z jednoznačnosti potom vyplýva, že $\vec{\gamma} = \vec{0}$. □

Cvičenia

Úloha 1. Zistite[2] $d(U)$, $d(V)$, $d(U+V)$, $d(U\cap V)$, bázu $U+V$ a bázu $U \cap V$
a) v R^2 pre $U = [(2,5)]$, $V = [(1,3)]$
b) v R^3 pre $U = [(1,2,3),(-1,2,3)]$, $V = [(2,1,4),(-2,1,4)]$
c) v R^4 pre $U = [(1,0,1,0),(1,0,0,1)]$, $V = [(1,1,1,0),(1,0,1,1)]$
d) v R^4 pre $U = [(1,2,3,4),(1,1,1,1),(4,3,2,1)]$, $V = [(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)]$.
[a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,3,1; d)2,3,4,1]

Úloha 2. Nech $T = [(1,3,2),(2,1,3),(3,4,0)]$ je podpriestor $(Z_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, že $(Z_5)^3 = T \oplus S$. Je tento podpriestor jednoznačne určený?

Úloha 3. Nech $S \neq T$ sú dva podpriestory vektorového priestoru F^3 nad poľom F a $d(S) = 2$, $d(T) = 2$. Dokážte, že $d(S\cap T) \geq 1$.

Úloha 4*. Dokážte, že ak $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}$ je báza vektorového priestoru V, tak $V = [\vec{e_1}] \oplus \ldots \oplus [\vec{e_k}]$.

[2] Túto úlohu budeme riešiť neskôr, keď sa naučíme jednoduchý spôsob ako rátať dimenziu podpriestoru R^n.