1 Jordanov normálny tvar

Úloha 1. Nájdite Jordanov normálny tvar matice
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Vlastné hodnoty. Najprv nájdeme vlastné hodnoty matice A. Na to potrebujeme vyrátať charakteristický polynóm. Je to determinant 4×4 – môžeme ho vyrátať pomocou Laplaceovho rozvoja, alebo si pomôcť riadkovými a stĺpcovými úpravami.

$$|xI-A| = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & x & 1 & -1 \\ 2 & 2 & x+1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & x-4 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x-1 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & -1 \\ 2 & 2 & x+1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & x-4 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & -1 \\ 2 & 2 & x+1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & x-4 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & -1 \\ 2 & 4 & x+1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & x-4 \end{vmatrix} =$$
$$(x-1) \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 4 & x+1 & -4 \\ 3 & 2 & x-4 \end{vmatrix} = (x-1)[x(x+1)(x-4) - 8 - 12 + 3(x+1) - 4(x-4) + 8x] =$$
$$(x-1)[x^3 - 3x^2 + 3x - 1] = (x-1)^4.$$

(Použité úpravy: (1) odpočítať druhý riadok od prvého; (2) pripočítať prvý stĺpec k druhému)

Zistili sme, že matica má štvornásobnú vlastnú hodnotu 1.

Vlastné vektory. Chceme nájsť vektory také, že $xA = 1.x$, čiže $x(A - 1.I) = 0$, $(A - I)^T x^T = 0$. Riešime teda sústavu, ktorá má maticu $(A - I)^T$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastný podpriestor je generovaný vektormi $[(-1,1,0,0),(-2,0,-1,2)]$. (Ľahko sa môžeme presvedčiť, že tieto vektory spĺňajú rovnosť $xA = 1.x$, čiže máme aspoň takúto možnosť urobiť si skúšku.)

Našli sme 2 vlastné vektory $\Rightarrow$ Jordanov normálny tvar matice A pozostáva z 2 blokov.

Ďalej budeme hľadať zovšeobecnené vlastné vektory – teda vektory spĺňajúce $x(A-I)^n = 0$. Môžeme to robiť, tak, že riešime rovnakú sústavu ako predtým, ibaže ako pravú stranu použijeme vlastné vektory.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2 & -1 & -s-2t \\ -1 & -1 & -2 & -2 & s \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -t \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 2t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2t \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -s-2t \\ -1 & -1 & -2 & -2 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+t \end{array}\right)$$

Vidíme, že takáto sústava má riešenie iba pre $s = -t$. Dosadíme teda na pravej strane všade s namiesto $-t$. Navyše si môžeme zvoliť $t = 1$. (Získame tak vektor, ktorého násobky sú tiež zovšeobecnené vlastné vektory.)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jedno z riešení je $(0,-1,0,1)$. (Všetky riešenia sústavy by sme získali ako súčet tohoto riešenie a ľubovoľného riešenia homogénnej sústavy – čiže ľubovoľného vlastného vektora. Takisto môžeme overiť, že $(0,-1,0,1)A = (-1,-2,-1,3) = (0,-1,0,1) + (-1,-1,-1,2)$, pričom $(-1,-1,-1,2) = 1.(-2,0,-1,2) - 1.(-1,1,0,0)$ je vlastný vektor. Tento vektor je teda skutočne zovšeobecnený vlastný vektor.)

Zistili sme, že až na násobok máme jediný zovšeobecnený vlastný vektor (ktorý nie je vlastným vektorom), preto v Jordanovom tvare bude len jeden blok prislúchajúci vlastnému číslu 1 veľkosti väčšej ako 1.

Pretože máme 2 bloky a len jeden z nich nie je veľkosti 1, jediná možnosť je $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matica prechodu. Pokúsme sa nájsť aj príslušnú maticu prechodu (hoci to nebolo pôvodne v zadaní). To znamená vlastne nájsť bázu, pri ktorej má zobrazenie určené maticou A maticu

J. Zrejme na prvom a štvrtom mieste zvolíme vlastné vektory. Na treťom mieste by mal byť zovšeobecnený vlastný vektor – aby tento vektor mal skutočne súradnice $(0,0,1,1)$, musíme zvoliť ako štvrtý vektor bázy ten vlastný vektor, ktorý zodpovedá tomuto zovšeobecenenému vlastnému vektoru. Zatiaľ však máme len 3 vektory – opäť by sme mali riešiť sústavu, kde pravou stranou bude zovšeobecnený vlastný vektor.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2 & -1 & -1-s-2t \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -2+s \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 3+2t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 3+2t \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1+s+2t \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1-s-2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3+s-t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 3+2t \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1+s+2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3+s-t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1-2s-2t \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1+s+2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3+s-t \end{array}\right)$$

Táto sústava má riešenie pre $s-t=3$. Pre jednoduchosť (aby vyšli pekné čísla) si zvoľme $s=2$, $t=-1$. Máme sústavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ktorej riešením je napríklad $(-2,0,0,1)$. (Ostatné riešenia by sme dostali pripočítaním vhodného riešenia homogénnej súsatvy.) Môžeme overiť, že platí:

$(-2,0,0,1)A = (-3,0,0,2) = (-2,0,0,1) + (-1,0,0,1)$

$(-1,0,0,1)A = (-2,-1,-1,3) = (-1,0,0,1) + (-1,-1,-1,2)$

Časť našej bázu zodpovedajúca Jordanovmu bloku 3×3 teda môže byť tvorená troma vektormi $(-2,0,0,1)$, $(-1,0,0,1)$, $(-1,-1,-1,2)$. Doplníme ju ešte niektorým vlastným vektorom, ktorý nie je násobok $(-1,-1,-1,2)$, a dostaneme tak maticu

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

pre ktorú platí $PAP^{-1} = J$. (Túto časť, kde sme hľadali maticu P sme robili len na ilustráciu – zvyčajne je zadanie také, že treba nájsť iba Jordanov tvar J.)

Riešenie pomocou hodností. V podstate to isté riešenie môžeme zapísať pomocou zisťovania hodností mocním matice $A-I$.

V našom prípade konkrétne dostaneme

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z Cayleyho-Hamiltonovej vety vieme, že $(A-I)^4 = 0$. Hodnosti týchto matíc sú $h(A-I) = 2$, $h((A-I)^2) = 1$, $h((A-I)^3) = h((A-I)^4) = 0$.

Vieme, že $h(A-I)$ určuje počet Jordanových blokov prislúchajúcich k vlastnému číslu 1. Máme $4 - h(A-I) = 2$ bloky. Súčasne $h((A-I)^2) > h((A-I)^4)$, teda pri mocnine 2 ešte hodnosť neprestane klesať. Preto najväčší Jordanov blok musí mať veľkosť aspoň 3, ž čoho už jednoznačne vieme určiť Jordanov tvar. (Vidíme, že v tomto príklade sme vlastne $(A-I)^3$ ani nemuseli rátať.)

Úloha 2. Ak existujú, nájdite ortogonálnu maticu P a diagonálnu maticu D tak, aby $D = PAP^T$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Postupujeme štandardne ako pri Jordanovom normálnom tvare. Charakteristický polynóm výjde $(x+3)^2(x-6)$. Dôležité je vlastné vektory normalizovať, prípadne ak je niektorá vlastné hodnota viacnásobná, tak aj z nich urobiť ortonormálnu bázu. (Aby sme dostali ortogonálnu maticu.)

Vlastné vektory prislúchajúce k -3 sú $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$. Vlastný vektor pre 6 je $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. Keď tieto vektory dáme do riadkov dostaneme hľadanú maticu P.