Zadania

1. Zistite, či dané body $A_0, \ldots, A_4$ tvoria barycentrický súradnicový systém v $\mathbb{R}^4$ a ak je to možné, vyjadrite bod P ako ich barycentrickú kombináciu.
A. $A_0 = (1,2,-1,1)$, $A_1 = (0,2,0,1)$, $A_2 = (2,1,0,1)$, $A_3 = (0,1,0,3)$, $A_4 = (2,0,0,1)$, $P = (-1,2,-1,-1)$
B. $A_0 = (1,2,1,1)$, $A_1 = (1,2,0,2)$, $A_2 = (2,1,0,1)$, $A_3 = (1,1,1,1)$, $A_4 = (2,0,1,1)$, $P = (1,0,0,1)$
C. $A_0 = (2,1,1,1)$, $A_1 = (1,2,0,2)$, $A_2 = (3,2,1,1)$, $A_3 = (1,1,1,0)$, $A_4 = (1,0,1,0)$, $P = (2,-1,0,1)$

2. V $\mathbb{R}^4$ je zadaná priamka p a rovina (B. nadrovina) α. Určte ich vzájomnú polohu.

A. $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = 1 - v \\ x_3 = 1 - u \\ x_4 = v \end{cases}$ $p \equiv \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2 - t \\ x_3 = 1 - t \\ x_4 = t \end{cases}$ B. $\alpha \equiv x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$, $p \equiv \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2 - t \\ x_3 = 1 - t \\ x_4 = t \end{cases}$

C. $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ $p \equiv \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 + t \end{cases}$

3. Sú zadané body A a B. Tvoria body s vlastnosťou $|AX| = |BX|$ (kde $|PQ|$ znamená vzdialenosť bodov P a Q) afinný podpriestor $\mathbb{R}^4$? Ak áno, aký je to podpriestor, akú má dimenziu? Nájdite jeho všeobecné a parametrické vyjadrenie.
A. $A = (1,0,1,3)$, $B = (2,1,0,1)$
B. $A = (1,1,0,-3)$, $B = (2,0,1,1)$
C. $A = (2,1,0,1)$, $B = (2,0,1,1)$

Výsledky

1A: Tvoria barycentrický súradnicový systém. $P = A_0 + 2A_1 - 3A_2 - A_3 + 2A_4$
1B: Tvoria barycentrický súradnicový systém. $P = -2A_0 + A_2 - 3A_3 - A_4$
1C: Tvoria barycentrický súradnicový systém. $P = -3A_0 + A_1 + 2A_2 - 4A_3 + 5A_4$

2: A mimobežné, B rovnobežné, C pretínajú sa, nie sú rovnobežné, priesečník=$(0,0,1,0)$.

3: Stačí nájsť nadrovinu, ktorá má ako normálový vektor $\overrightarrow{AB}$ a prechádza stredom úsečky AB.

Bodovanie

Vo všetkých úlohách boli 2 body z piatich za správny výsledok. Čiže ak ste prišli na to, ako úlohu riešiť, ale spravili set nejakú numerickú chybu ešte stále ste mohli získať 3 body za správny postup. (Väčšinou sa to dalo rozdeliť na 2 podvýsledky každý za 1 bod: určenie, či to je barycentrický súradnicový systém+vypočítanie koeficientov; normálový vektor+koeficient v rovnici nadroviny)

1. V tejto úlohe niektorí z Vás vyjadrili $\overrightarrow{A_0P}$ pomocou $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_4}$, ale nepreviedli to ďalej na vyjadrenie P pomocou $A_0, \ldots, A_4$. Pretože v zadaní bolo, že treba vyjadriť bod P (ako barycentrickú kombináciu) v takomto prípade som strhával $0,5$ bodu.

Riešenia

1. Ukážme si spôsob riešenia na príklade skupiny C.

Zistite, či dané body $A_0, \ldots, A_4$ tvoria barycentrický súradnicový systém v $\mathbb{R}^4$ a ak je to možné, vyjadrite bod P ako ich barycentrickú kombináciu.
$A_0 = (2,1,1,1)$, $A_1 = (1,2,0,2)$, $A_2 = (3,2,1,1)$, $A_3 = (1,1,1,0)$, $A_4 = (1,0,1,0)$, $P = (2,-1,0,1)$

Máme viac možností na riešenie. To či ide o barycentrický súradnicový systém overíme na základe vety z prednášky, ktorá hovorí, že $A_0, \ldots, A_4$ je barycentrický súradnicový systém práve vtedy, keď vektory $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}, \overrightarrow{A_0A_4}$ tvoria bázu priestoru $\mathbb{R}^4$. My máme:
$\overrightarrow{A_0A_1} = (-1,1,-1,-1)$
$\overrightarrow{A_0A_2} = (1,1,0,0)$
$\overrightarrow{A_0A_3} = (-1,0,0,-1)$
$\overrightarrow{A_0A_4} = (-1,-1,0,-1)$
Potrebujeme len zistiť, či sú tieto vektory lineárne nezávislé. Môžeme to však urobiť rafinovane - tak, že si pri tom vypočítame aj niečo ďalšie, čo nám pomôže pri vyjadrení vektoru $\overrightarrow{AP}$ pomocou týchto vektorov.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & & 1 & & \\ -1 & 0 & 0 & -1 & & & 1 & \\ -1 & -1 & 0 & -1 & & & & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Samozrejme, že takýmto spôsob bol trochu prácnejší, ale má 2 výhody. Prvou z nich je, že v ktoromkoľvek kroku výpočtu sa môžeme zastaviť a urobiť skúšku správnosti – zväčša to býva tak, že skúška sa dá urobiť len na konci výpočtu. (Napríklad ak sa pozrieme na prvý riadok tretej matice v predházdajúcom výpočte, ten nám vlastne hovorí, že $(-1,0,0,0) = -\overrightarrow{A_0A_2} + \overrightarrow{A_0A_3} - \overrightarrow{A_0A_4}$, o čom sa môžeme ľahko presvedčiť priamym výpočtom.)

Matica vpravo je vlastne maticou prechodu od štandardnej bázy k báze $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}, \overrightarrow{A_0A_4}$. Preto keď chceme vyjadriť vektor $\overrightarrow{A_0P} = (0,-2,-1,0)$, ľahko to urobíme pomocou tejto matice. Súradnice tohoto vektora v báze $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}, \overrightarrow{A_0A_4}$ sú teda $-2(0,0,1,-1) - (-1,-2,2,-3) = (1,2,-4,5)$.

Dostali sme
$$\overrightarrow{A_0P} = \overrightarrow{A_0A_1} + 2\overrightarrow{A_0A_2} - 4\overrightarrow{A_0A_3} + 5\overrightarrow{A_0A_4}.$$

Z toho vyrátame

$$P - A_0 = (A_1 - A_0) + 2(A_2 - A_0) - 4(A_3 - A_0) + 5(A_4 - A_0)$$
$$P = -3A_0 + A_1 + 2A_2 - 4A_3 + 5A_4$$

Ďalšie možnosti riešenia – ak pri overovaní, či sú vektory $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}, \overrightarrow{A_0A_4}$ lineárne nezávislé nevyrátame maticu prechodu, môžeme koeficienty získať tak, že vyriešime sústavu $\overrightarrow{A_0P} = x\overrightarrow{A_0A_1} + y\overrightarrow{A_0A_2} + z\overrightarrow{A_0A_3} + w\overrightarrow{A_0A_4}$. Z jej riešenia dostaneme koeficienty barycentrickej kombinácie podobným spôsobom ako v predhchádzajúcom prípade.

Iná možnosť je riešiť priamo sústavu $P = aA_0 + bA_1 + cA_2 + dA_3 + eA_4$, pričom pridáme ešte piatu rovnicu $a + b + c + d + e = 1$. (Poznámka: Z prednášky vieme, že pomocou bodov tvoriacich barycentrický súradnicový systém sa dá vyjadriť každý bod afinného priestoru, a toto vyjadrenie je jednoznačné. Takže komu vyšlo viac riešení alebo nevyšlo žiadne, bolo treba hľadať niekde chybu.)

2. Príkladov takéhoto typu sme prerátali veľa – stačí určiť v akom vzťahu sú bodové zložky a vektorové zložky.

3. Máme zadané body $A = (a_1, \dots, a_n)$ a $B = (b_1, \dots, b_n)$ a máme určiť množinu takých bodov $X \in \mathbb{R}^n$, pre ktoré platí $|AX| = |BX|$.

Máme dva pomerne jednoduché spôsoby ako ich riešiť, prvý je vlastne len jednoduchá úprava algebraických výrazov, druhý je skôr geometrický.

Z podmienky $|AX| = |BX|$ vyplýva aj $|AX|^2 = |BX|^2$, čo môžeme postupne upravovať takto:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - b_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2x_i a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2x_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - a_i^2$$

Dostali sme nadrovinu ktorej normálový vektor je $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$.

Na to, že takéto body tvoria práve túto nadrovinu možno prísť aj geometricky: Stačí si nakresliť do obrázku body A, B, X a S, kde S je stred úsečky AB. Z obrázku vidíme, že trojuholník ABX je rovnoramenný a S je súčasne päta jeho výšky, teda vektor $\overrightarrow{SX}$ je kolmý na vektor $\overrightarrow{AB}$.