Zadania

1. Sú zadané body $A_0, \ldots, A_4, X \in \mathbb{R}^4$ a body $B_0, \ldots, B_4 \in \mathbb{R}^3$. Zistite, či body $A_0, \ldots, A_4$ tvoria barycentrický súradnicový systém v $\mathbb{R}^4$. Nech $(f, \varphi)\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ je afinné zobrazenie také, že $f(A_i) = B_i$ pre $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Vypočítajte $\varphi(\overrightarrow{A_0X})$.

$A_0 = (1,2,1,0)$ $\quad B_0 = (0,0,1)$
$A_1 = (1,0,0,1)$ $\quad B_1 = (1,3,1)$
$A_2 = (0,1,1,-1)$ $\quad B_2 = (1,0,0)$
$A_3 = (0,0,1,1)$ $\quad B_3 = (0,1,0)$
$A_4 = (1,1,0,0)$ $\quad B_4 = (0,1,1)$
$X = (3,3,-1,-1)$

2. Určte vzájomnú polohu rovín α a β v $\mathbb{R}^4$. Nadrovina α je určená bodmi A, B, C, nadrovina β je zadaná všeobecnými rovnicami

$A = (1,1,3,1),$
$B = (0,0,2,2)$ $\qquad \beta \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$
$C = (0,0,1,1)$

Určte vzájomnú α a β.

3. Nech $\alpha = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3\}$ a
$\beta = \{(1+s+t+u, 2-s+t, 1-s-t, 2+s-t-u); s, t, u \in \mathbb{R}\}$
sú nadroviny v $\mathbb{R}^4$. Zapíšte množinu bodov $M = \{X \in \mathbb{R}^4, \varrho(X,\alpha) = \varrho(X,\beta)\}$ ako zjednotenie 2 afinných podpriestorov. (Tieto afinné podpriestory popíšte pomocou všeobecných rovníc. Ako $\varrho(X,\alpha)$ označujeme vzdialenosť bodu od afinného podpriestoru.)

Výsledky

1.$\varphi(\overrightarrow{A_0X}) = (1,2,2)$
2. Čiastočne rovnobežné, čiastočne mimobežné.
3. $x_1 + x_2 + x_4 = \frac{9}{2}$, $x_3 = -\frac{3}{2}$

Riešenia

1. Vieme, že má platiť $\varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Dostali sme maticu lineárneho zobrazenia φ. Teraz už ľahko vyrátame, že $\varphi(\overrightarrow{A_0X}) = \varphi(2,1,-2,-1) = (1,2,2)$.

Súčasne sme pri predchádzajúcom výpočte zistili, že vektory $\overrightarrow{A_0A_i}$ sú lineárne nezávislé, teda dané body tvoria barycentrický súradnicový systém.

Iná možnosť riešenia: Vyjadriť X ako barycentrickú kombináciu $A_0, \ldots, A_4$ a využiť to, že f zachováva barycentrické kombinácie. Dostaneme $X = A_0 + A_1 - 2A_3 + A_4$. Teda $Y = f(X) = B_0 + B_1 - 2B_3 + B_4 = (1,2,3)$ a $\varphi(\overrightarrow{A_0X}) = \overrightarrow{B_0Y} = (1,2,2)$.

2. Rovina α je určená rovnicami:
$x_1 - x_2 = 0$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$

Prienik bodových zložiek je prázdny. Prienik vektorových zložiek je $\{(t,t,0,-2t); t \in \mathbb{R}\}$, čiže neplatí $V_\alpha \subseteq V_\beta$ ani $V_\beta \subseteq V_\alpha$. Dané roviny sú čiastočne rovnobežné a čiastočne mimobežné.

3. Ak by sme mali obe nadroviny vyjadrené pomocou všeobecných rovníc ako

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 - c = 0$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 - d = 0$$

Tak podmienka, že vzdialenosti sú rovnaké vlastne hovorí:

$$\frac{|a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 - c|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} = \frac{|b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 - d|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}}$$

Ak označíme $k = \frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}}$, tak máme:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 - c = \pm k(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 - d)$$
$$(a_1 \mp b_1)x_1 + (a_2 \mp b_2)x_2 + (a_3 \mp b_3)x_3 + (a_4 \mp b_4)x_4 - c \pm kd = 0$$

a vidíme, že naša množina je zjednotením 2 nadrovín.

V našom konktrétnom prípade máme jednu všeobecnú rovnicu v tvare $x_1+x_2-x_3+x_4 = 3$. Druhú rovnicu máme zadanú pomocou parametrického vyjadrenia, ktoré vieme previesť na všeobecnú rovnicu. Dostaneme $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$. V našom prípade navyše dostaneme $k = 1$. Takže hľadané nadroviny sú

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 9$$
$$2x_3 = -3$$

(alebo po predelení dvojkou $x_1 + x_2 + x_4 = \frac{9}{2}$, $x_3 = -\frac{3}{2}$).

Tento výsledok zodpovedá presne aj tomu, čo by sme dostali na základe našej geometrickej intuície. Ak si totiž nakreslíte obrázok v rovine (nadroviny sú priamky), tak normálové vektory osí uhlov sú práve $\vec{n}_1 \pm \vec{n}_2$. Vzhľadom k tomu, že nás vlastne zaujíma len hľadaný bod X a jeho kolmé priemety do nadrovín α a β, ktoré všetky ležia v rovine určenej bodom X a normálovými vektormi týchto 2 nadrovín, skutočne nám stačí skúmať tento rovninný prípad.