1. Určte vzájomnú polohu roviny α a priamky p v $\mathbb{R}^4$. Rovina α je určená bodmi A, B, C, priamka p je zadaná parametricky.

A=(1,1,1,3)
B=(0,0,2,2)
C=(0,0,1,1)

$$p \equiv \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2t \end{cases}$$

2. V $\mathbb{R}^4$ sú dané bod $A = (0, 2, 1, 0)$ a rovina

$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = 1 - v \\ x_3 = 1 - u \\ x_4 = v \end{cases} .$$

Vypočítajte kolmý priemet bodu A do roviny α a vzdialenosť $\varrho(A, \alpha)$.

3. Uvažujme afinné zobrazenie $(f, \varphi)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ktoré je určené predpisom $f(x, y, z) = (2 + x+2y+z, x+4y+3z, 1+3x+5z)$. Uvažujme ďalej rovnobežnosten určený vektormi štandardnej bázy $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. (Teda vrcholy rovnobeženostena sú $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$.) Aký je objem obrazu tohoto rovnobežnostena v zobrazení f?

Výsledky

1. $\alpha \cap p = \emptyset$, $V(\alpha) \cap V(p) = \{\vec{0}\}$
mimobežné
2. $A^{\perp} = (-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$, $\varrho(A, p) = |AA^{\perp}| = \frac{\sqrt{15}}{5}$
3. 16

Riešenia

1. Rovina α je určená rovnicami
$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$
$x_1 - x_2 = 0$
Aby sme vyrátali prienik bodových zložiek, dosadíme do tejto sústavy za $x_1, \ldots, x_4$ parametrické vyjadrenie p a dostaneme, že sústava nemá riešenie. Pre vektorové zložky dosazdujeme do tých istých rovníc (pretože pravá strana je 0) hodnoty $(t, -t, 0, 2t)$ (toto je verktorová zložka p). Riešením sústav dostaneme:
$\alpha \cap p = \emptyset$, $V(\alpha) \cap V(p) = \{\vec{0}\}$
α a p sú mimobežné
2. Najprv určíme kolmopremietací priestor. Je to rovina kolmá na α a prechádzajúca bodom A. Teda poznáme normálové vektory – sú to smerové vektory roviny α – a chýbajúci koeficient všeobecných rovníc dorátame tak, aby bod A patril tejto rovine.

$$x_1 - x_3 = -1$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = -2$$

Teraz hľadáme prienik roviny α s kolmoopremietacím priestorom – dosadím parametrické vyjadrenie α do predchádzajúcich rovníc.

$$2u + v - 1 = -1$$
$$u + 3v - 1 = -2$$

Po úprave

$$2u + v = 0$$
$$u + 3v = -1$$

Riešením tejto sústavy je $u = \frac{1}{5}$, $v = -\frac{2}{5}$, čo zodpovedá bodu $A^{\perp} = (-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$. Z toho dostaneme $\overrightarrow{AA^{\perp}} = (-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$ a $\varrho(A,p) = |AA^{\perp}| = \frac{\sqrt{1+9+1+4}}{5} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

3. Dané afinné zobrazenie je zložením lineárneho zobrazenia $\varphi(x,y,z) = (x + 2y + z, x + 4y + 3z, 3x + 5z)$ a posunutia o vektor $(2,0,1)$. Posunutie neovplyvní veľkosť telesa – stačí si všímať lineárne zobrazenie φ. Z prvého ročníka vieme, že absolútna hodnota determinantu matice lineárneho zobrazenia udáva koľkokrát sa týmto zobrazením zväčší jednotková kocka. V našom prípade máme
$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$
a determinant tejto matice je 16.

Iná možnosť ako to riešiť bola vypočítať priamo z predpisu zobrazenia obrazy body $A = f(0,0,0)$, $B = f(1,0,0)$, $C = f(0,1,0)$, $D = f(0,0,1)$. Tieto body určujú rovnobežnosten, ktorého objem chceme vyrátať. Z prednášky vieme, že tento objem sa dá vyrátať ako absolútna hodnota zmiešaného súčinu $V = |(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}|$.