Zadania

1. Nájdite vlastné čísla, ľavé vlastné vektory a Jordanov normálny tvar danej matice.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Pre aké hodnoty parametra a je kvadratická forma $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ kladne definitná?
3. Ak existuje, nájdite diagonálnu maticu D a ortogonálnu maticu P, pre ktoré platí $A = PDP^T$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Nájdite vlastné čísla, ľavé vlastné vektory a Jordanov normálny tvar danej matice.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Pre aké hodnoty parametra a je kvadratická forma $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$ kladne definitná?
3. Ak existuje, nájdite diagonálnu maticu D a ortogonálnu maticu P, pre ktoré platí $A = PDP^T$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Riešenia

1. Najprv vyrátame charakteristický polynóm – teda determinant $|xI - A|$.
$|xI - A| = \begin{vmatrix} x & -2 & -2 \\ 1 & x-3 & -1 \\ 1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x & -2 & -2 \\ 1 & x-3 & -1 \\ 0 & 2-x & x-2 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} x & -2 & -2 \\ 1 & x-3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (x-2) \begin{vmatrix} x & -4 & -2 \\ 1 & x-4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
$\overset{(3)}{=} (x-2) \begin{vmatrix} x & -4 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} = (x-2)[x(x-4)+4] = (x-2)[x^2-4x+4] = (x-2)^3.$
Použité úpravy:
(1) od 3. riadku odčítame druhý
(2) k 2. stĺpcu pripočítame tretí
(3) Laplaceov rozvoj podľa 3. riadku

Matica A má trojnásobnú vlastnú hodnotu 2.

Teraz vyrátame vlastné vektory pre túto vlastnú hodnotu. To znamená, že riešime sústavu určenú maticou $(2I - A)^T$.
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Riešenia tejto sústavy (=vlastný podpriestor matice A) sú teda $\{(t, s, -2t - s; s, t \in \mathbb{R})\} = [(1, 0, -2), (0, 1, -1)]$. (Môžeme sa presvedčiť, že naozaj platí $(1, 0, -2)A = 2.(1, 0, -2)$ a $(0, 1, -1) = 2.(0, 1, -1)$.)

Vlastné vektory tvoria dvojrozmerný podpriestor $\mathbb{R}^3$, preto v Jordanovom tvare budú vlastnej hodnote 2 zodpovedať 2 bloky. Jediná možnosť, ako môže vyzerať Jordanov tvar matice A je

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Matica danej kvadratickej formy je $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Potrebujeme zistiť pre aké a sú rohové determinanty kladné.

$2 > 0$
$\left|\begin{smallmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{smallmatrix}\right| = 2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow |a| < \sqrt{2}$
$\left|\begin{smallmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right| = 6 - 1 - 3a^2 = 5 - 3a^2 = 3(\frac{5}{3} - a^2) > 0 \Leftrightarrow |a| < \sqrt{\frac{5}{3}}$.
Celkovo dostávame: $a \in \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

3. Najprv vyrátame vlastné hodnoty a vlastné vektory.
$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 & 0 \\ x-2 & x-2 & x-2 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (x-2) \begin{vmatrix} x-2 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} (x-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} (x-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} (x-2)^2 \left|\begin{smallmatrix} x-2 & -2 \\ -2 & x-2 \end{smallmatrix}\right| = (x-2)^2[(x-2)^2 - 4] = (x-2)^2(x^2 - 4x) = (x-2)^2 x(x-4)$.
(1): K 4. riadku pripočítame prvé tri riadky.
(2): K 1. riadku pripočítame druhý riadok.
(3): Od 4. riadku odčítame prvý.
(4): Od 2. stĺpca odrátame prvý, od 3. stĺpca odrátame štvrtý.
(5): Laplaceov rozvoj, najprv podľa prvého riadku a potom podľa štvrtého.

Vlastné hodnoty sú 2 (dvojnásobná), 0 a 4. Preto

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vypočítame teraz vlastné vektory. (Pretože A je symetrická, v tomto prípade platí $(xI - A)^T = xI - A$.)

Vlastná hodnota $\lambda = 2$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Vlastné vektory: $[(1,1,0,0),(0,0,1,1)]$.

Vlastná hodnota $\lambda = 0$:
$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Vlastné vektory: $[(1,-1,1,-1)]$.

Vlastná hodnota $\lambda = 4$:
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Vlastné vektory sú $[(1,-1,-1,1)]$.

Maticu, ktorá spĺňa $QAQ^{-1} = D$ dostaneme tak, že do riadkov dáme vlastné vektory (v takom poradí, v akom sme dali do D vlastné hodnoty). Keď však navyše chceme, aby Q bola ortogonálna, potrebujeme použiť vlastné vektory, ktoré sú navzájom kolmé a majú veľkosť 1. Vieme, že vlastné vektory prislúchajúce 2 rôznym vlastným hodnotám sú na seba kolmé. Preto takéto vektory stačí vydeliť veľkosťou. V prípade viacnásobnej vlastnej hodnoty potrebujeme ešte nájsť nejakú ortonormálnu bázu pre vlastný podpriestor (Gramm-Schmidtov ortogonalizačný proces). V tomto prípade nám však vlastné vektory k 2 vyšli na seba kolmé. Preto nám stačí každý vlastný vektor vydeliť jeho veľkosťou.

V našom prípade teda pre

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

platí $QAQ^T = D$, z ortogonálnosti potom dostaneme $A = Q^T DQ$, teda hľadaná matica je $P = Q^T$.

(Čo sa týka jednoznačnosti, tak vlastné vektory k 0 a 4 sú určené až na znamienko jednoznačne – pretože potrebujeme, aby mali veľkosť 1 – pre 2 sa dala vybrať aj iná ortonormálna báza. Okrem toho sa ešte výsledok môže líšiť zvoleným poradím vlastných hodnôt na diagonále matice D.)

1. Charakteristický polynóm:
$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ -2 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x-2 & 0 & x-1 \\ 1 & x-2 & 0 \\ -2 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ 1 & x-2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (x-1) \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ 1 & x-2 & 0 \\ -x & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$
$(x-1) \begin{vmatrix} 1 & x-2 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = (x-1)[x(x-2)+1] = (x-1)(x^2-2x+1) = (x-1)^3$
(1) 1. stĺpec pripočítame k tretiemu.
(2) 1. riadok odčítame od tretieho
(3) Laplaceov rozvoj podľa tretieho stĺpca

Trojnásobná vlastná hodnota 1.

Vlastné vektory:
$(I-A)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
Riešenie sústavy: $[(1,-1,-1)]$.

Vlastný podpriestor je jednorozmerný$\Rightarrow$ vlastnej hodnote 1 zodpovedá jediný Jordanov blok.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} = 4 - a^2 > 0 \Leftrightarrow |a| < 2$
$\begin{vmatrix} 1 & a & 5 \\ a & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 30a - 105 = 120 - (a - 15^2)$
Pre $a \in (-2,2)$ máme $-17 > a - 15 > -13$, teda $(a-15)^2 > 13^2$ a $120 - (a-15)^2 < 120 - 13^2 = -49 < 0$.

Oba rohové determinanty teda nemôžu byť súčasne kladné $\Rightarrow$ také a neexistuje.

3. Vlastné hodnoty:
$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x-2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x-2 & -2 \\ x-4 & x-4 & x-4 & x-4 \end{vmatrix} = (x-4) \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$
$(x-4) \begin{vmatrix} x-4 & x-4 & 0 & 0 \\ -2 & x-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-4)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & x-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-4)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & x & 2 & -1 \\ -1 & 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$
$(x-4)^2(x^2-4) = (x-4)^2(x-2)(x+2)$
Vlastné hodnoty: 4 (dvojnásobná), ± 2

Vlastné vektory pre $\lambda = 4$ sú $[(1,1,0,0),(0,0,1,1)]$.

Vlastné vektory pre $\lambda = 2$ sú $[(-1,1,-1,1)]$.

Vlastné vektory pre $\lambda = -2$ sú $[(1,-1,-1,1)]$.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a $P = Q^T$

Komentáre

1.Viacerí z Vás rátali sústavu určenú maticou $A - \lambda I$, nie $(A - \lambda I)^T$. (Tak by sme vyrátali pravé vlastné vektory. Ak má platiť $f(x) = xA = \lambda x$, znamená to, že $x(A - \lambda I) = 0$, čiže dostávame sústavu $(A - \lambda I)^T x^T = 0^T$.)
3. Aby sme dostali *ortogonálnu* maticu P, nestačí len do nej dať vlastné vektory – treba ich ešte vydeliť veľkosťou a v prípade viacnásobnej vlastnej hodnoty treba vybrať ortonormálnu bázu vlastného podpriestoru.

Bodovanie

3 body za postup, 2 body za správny výsledok (prípadne za medzivýsledky). (Body za postup: Kto nerátal vlastné vektory v 1. príklade, strhával som 1 bod. Takisto v 3. príklade, kto nerátal maticu P.)