1 Afinné priestory, súradnicové sústavy, afinné zobrazenia, barycentrické súradnice

1. Nech $(f,\varphi)\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ je afinné zobrazenie. Nech C je afinný podpriestor priestoru $\mathcal{B}$. Je aj $f^{-1}(C)$ afinný podpriestor priestoru A?
2. V rovine určenej bodmi $A=(2,1,3)$, $B=(2,4,0)$, $C=(-3,0,4)$ zvoľme afinnú súradnicovú sústavu $(A,B-A,C-A)$.
   a) Aké parametrické vyjadrenie má v tejto súradnicovej sústave priamka BC?
   b) Aké súradnice má bod M v $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, ak jeho súradnice v $(A,B-A,C-A)$ sú $(5,3)$.
   c) Aké súradnice má priesečník roviny ABC s osou x_3 v jednej i druhej súradnicovej sústave. {BAR1}
3. Zistite, či body
   $A_0=(1,4,1,-1)$
   $A_1=(2,2,4,-5)$
   $A_2=(1,5,0,0)$
   $A_3=(2,7,1,-4)$
   $A_4=(1,-3,4,4)$ tvoria barycentrický súradnicový systém v $(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$. Vyjadrite bod $P=(0,-1,1,4)$ ako ich barycentrickú kombináciu.
4. Nech $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník v $\mathbb{R}^2$. Tvoria A, B, C barycentrickú súradnicovú sústavu? Vyjadrite v nej ostatné body šesťuholníka.

3. Výsledok: $P=A_1-A_0+3A_2-2A_3$.

2 Parametrické a všeobecné vyjadrenie

{PVV1}

1. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny určenej bodom $A=(1,0,-1,0)$ a vektormi $\vec{\alpha}=(3,1,-2,3)$ a $\vec{\beta}=(0,2,-1,3)$. Určuje parametrické vyjadrenie
   $x_1=1+u-2v-w$,
   $x_2=u+w$,
   $x_3=-1-u+2v$,
   $x_4=2u-v+w$
   tú istú rovinu?
2. Máme dané afinné podpriestory α:
   $x_1=1-u+v$
   $x_2=2+u-2v$
   $x_3=-2u+v$
   a rovinu β určenú bodom $O=(0,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$. Čomu sa rovná $\alpha\cap\beta$? Aké vyjadrenie má tento prienik v afinnej súradnicovej sústave $(P,\vec{a},\vec{b})$, kde $P=(1,2,0)$, $\vec{a}=(-1,1,1)$ a $\vec{b}=(1,-2,1)$?
   {PVV3}
3. Nájdite parametrické a všeobecné vyjadrenie roviny určenej bodmi $A=(5,-1,4,2)$, $B=(6,-1,5,5)$ a $C=(5,0,6,0)$.

4. Nájdite všeobecnú rovnicu nadroviny v $\mathbb{R}^4$ určenej bodmi $A = (1, 2, 3, 4)$, $B = (2, 2, 4, 4)$ a smerovými vektormi $\vec{a} = (0, 1, 0, 1)$ a $\vec{b} = (1, 1, 1, 0)$.

5. Nájdite všeobecné rovnice priamky $p = \{(1 + t, -1 + 2t, 1 - t)\}$.

1. Parametricky: $x_1 = 1 + 3s$, $x_2 = s + 2t$, $x_3 = 1 - 2s - t$, $x_4 = 3s + 3t$.
Všeobecne: $x_2 - x_3 - x_4 = 1$, $x_1 + x_2 + 2x_3 = -1$.
Pozn: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (3, 3, -3, 6)$
$2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (6, 0, -6, 3)$
$\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = (3, -3, 0, -3)$
Tu som všeobecné vyjadrenie „uhádol“ ale dalo sa to robiť aj systematicky. Mám 2 smerové vektory a tie upravujem na RTM (alebo niečo podobné)
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
Z toho: $x_2 = -x_1 - 2x_3$, $x_4 = -x_1 - 3x_3$ (toto sú rovnice pre vektorovú zložku).
Všeobecné vyjadrenie: $x_1 + x_2 + 2x_3 = -1$, $x_1 + 3x_3 + x_4 = -2$.

3. $\overrightarrow{CA} = (0, -1, 2, 2)$, $\overrightarrow{CB} = (1, -1, 1, 5)$.
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim$
Vektorová zložka:
$x_3 = -x_1 - 2x_2$, $x_4 = 3x_1 - 2x_2$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$, $3x_1 - 2x_2 - x_4 = 0$
Bodová zložka:
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$, $3x_1 - 2x_2 - x_4 = 15$

3 Vzájomné polohy, prieniky

Afinné podpriestory sú α a β sú určené bodovými zložkami B_α, B_β a vektorovými zložkami V_α, V_β. Hovoríme, že α a β sú
rovnobežné, ak $V_\alpha \subseteq V_\beta$ alebo $V_\beta \subseteq V_\alpha$;
rôznobežné, ak $B_\alpha \cap B_\alpha \neq \emptyset$;
mimobežné, ak $B_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$ a $V_\alpha \cap V_\beta = \{\vec{0}\}$;
čiastočne mimobežné a čiastočne rovnobežné, ak $B_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$ a $V_\alpha \cap V_\beta \neq \{\vec{0}\}$.

{VP2UL1}

1. Zistite vzájomnú polohu afinných podpriestorov α a β. Nájdite najmenší afinný podpriestor $[\alpha, \beta]$, ktorý obsahuje oba tieto podpriestory.

$$\alpha = \begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = v \\ x_3 = 1 + u + v \\ x_4 = 2 + u \\ x_5 = -1 + v \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} x_1 = 2v' \\ x_2 = u' + 2v' \\ x_3 = 2 + u' + 3v' \\ x_4 = 3 - v' \\ x_5 = -1 + 2u' + 3v' \end{cases}$$

{VP2PRIAMKY}

2. Dané sú priamky p a q

$$p \equiv \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -t \end{cases} \qquad q \equiv \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = s \\ x_3 = 1 - s \\ x_4 = -1 - s \end{cases}$$

a) Určte ich vzájomnú polohu.
b) Nájdite $[p, q]$.
c) Nájdite priamku r takú, že $r \cap p = \emptyset$, $r \cap q = \emptyset$ a $r \parallel (1, 3, -1, 1)$.

{VP2NADROV}

3. V $\mathbb{R}^4$ majme afinné podpriestory p a α. $p \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 2 + 3t \\ x_3 = 3 + 4t \\ x_4 = 4 + 5t \end{cases}$ $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 - 1 = 0 \end{cases}$

   a) Zistite, či $p \cap \alpha = \emptyset$. b) Nájdite nadroviny β a γ také, že $\beta \supset p$, $\gamma \supset \alpha$ a $\beta \parallel \gamma$.

{VP2PRIESEK}

4. Majme trojicu priamok $p = \{(s, s, 1-s, 1); s \in \mathbb{R}\}$, $q = \{(t, 2t, 3-t, 1-t); t \in \mathbb{R}\}$, $r = \{(-u, -2, -1+u, 2u); u \in \mathbb{R}\}$.
   a) Zistite, či sú po dvoch mimobežné.
   b) Nájdite priamku (ak taká existuje), ktorá pretne každú priamku z tejto trojice.

2. a) $p \cap q = \emptyset$ a $V_p \cap V_q = [(-1, 1, 0, -1)] \cap [(1, 1, -1, -1)] = \emptyset$ (smerový vektor p nie je násobkom smerového vektora q) $\Rightarrow$ mimobežné.
b) Afinný podpriestor $[p, q]$ je určený bodom $A = (1, 1, 1, 0)$ a vektormi $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0, 1)$, $\vec{u} = (-1, -1, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, 1, -1, -1)$. (Dva z nich sú smerové vektory priamok a tretí sme získali ako vektor spájajúci niektorý bod jednej priamky s bodom inej priamky. Tieto vektory sú lineárne nezávislé– inak by mali p a q neprázdny prienik.)
c) Ak $X \in p$, $Y \in q$, tak $\overrightarrow{XY} = (s + t - 1, s - t - 1, -s, t - s - 1)$.
Chceme, aby $\overrightarrow{XY} \parallel (1, 3, -1, 1)$, čiže $\overrightarrow{XY} = (u, 3u, -u, u)$. Porovnaním tretej súradnice máme $u = -s$, čiže $\overrightarrow{XY} = (s, 3s, -s, s)$. Prvá a štvrtá nám dajú rovnice
$s + t - 1 = s \Rightarrow t = 1$
$s - 2 = 3s \Rightarrow s = -1$.
Pre tieto hodnoty s a t máme $X = (0, 2, 1, -1)$, $Y = (-1, -1, 2, 0)$ a $\overrightarrow{XY} = (-1, -3, 1, -1)$, čiže vidíme, že priamke $r = \{X + t\overrightarrow{XY}; t \in \mathbb{R}\}$ skutočne vyhovuje zadaniu.

3. a) Sú mimobežné. b) Tieto nadroviny majú vektorovú zložku $V = [(2, 3, 4, 5), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), \overrightarrow{AB}]$, kde $A = (1, 2, 3, 4)$ a $B = (0, 0, 1, 0)$. Táto vektorová zložka spolu s bodom A (a v druhom prípade bodom B) určuje hľadanú nadrovinu.

4. a) Priamky sú po 2 mimobežné.
b) Ak $X \in p$, $Y \in q$, $Z \in r$, tak
$\overrightarrow{XY} = (t - s, 2t - s, 2 - t + s, -t)$
$\overrightarrow{XZ} = (-u - s, -2 - s, -2 + u + s, 2u - 1)$
Chcem nájsť $t, s \in \mathbb{R}$ také, aby platilo $\overrightarrow{XY} = k\overrightarrow{XZ}$, čiže
$t - s = k(-u - s)$
$2t - s = k(-2 - s)$
$2 - t + s = k(-2 + u + s)$
$-t = k(2u - 1)$
Keď sčítame prvú a tretiu rovnicu dostaneme
$2 = -2k$
čiže $k = -1$. Po dosadení tejto hodnoty za k dostaneme rovnice. $t - s = u + s$
$2t - s = 2 + s$
$2 - t + s = 2 - u - s)$
$-t = -2u + 1)$
Upravením a dosadením do sústavy máme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & -2 & 0 & | & -2 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie je teda $s = 0$, $t = 1$, $u = 1$.
Dostávame tak body $X = (0, 0, 1, 1)$, $Y = (1, 2, 2, 0)$, $Z = (-1, -2, 0, 2)$, ktoré skutočne ležia na jednej priamke. (Hľadaná priamka je $\{(0, 0, 1, 1) + w(1, 2, 1, -1); w \in \mathbb{R}\}$.)

Skúsme to trochu inak – aby sme si precvičili prechody medzi súradnicovými sústavami.

Zadané priamky sú určené bodmi $A = (0, 0, 1, 1)$, $B = (0, 0, 3, 1)$, $C = (0, -2, -1, 0)$ a vektormi $\vec{\alpha} = (1, 1, -1, 0)$, $\vec{\beta} = (1, 2, -1, -1)$, $\vec{\gamma} = (-1, 0, 1, 2)$.

Najprv si zvoľme novú afinnú súradnicovú sústavu $(A, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \overrightarrow{AB})$. Chceme vyjadriť všetky body a priamky vystupujúáce v úlohe v tejto súradnicovej sústave. Súradnice niektorých sú jasné:
$A \equiv (0, 0, 0, 0)$, $B \equiv (0, 0, 0, 1)$, $\vec{\alpha} \equiv (1, 0, 0, 0)$, $\vec{\beta} \equiv (0, 1, 0, 0)$ a $\vec{\gamma} \equiv (0, 0, 1, 0)$. Ešte nám chýba vyjadrenie bodu C. Môžeme postupovať napríklad takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & | & 1 & 1 & -1 & 0 \\ & 1 & & & | & 1 & 2 & -1 & -1 \\ & & 1 & & | & -1 & 0 & 1 & 2 \\ & & & 1 & | & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Získali sme tým súradnice vektorov štandardnej bázy (maticu prechodu). Vieme už teraz vyjadriť súradnice vektora $\overrightarrow{AC}$ v tejto báze vektorového priestoru $\mathbb{R}^4$ (čo sú súčasne súradnice bodu C v novej súradnicovej sústave).

Vektor $\overrightarrow{AC} = (0, -2, -2, -1)$ má súradnice $-2(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) - 2(0, 0, 0, \frac{1}{2}) - 1(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0) = (0, -1, -1, -1)$.

Teraz už môžeme nájsť parametrické vyjadrenie jednotlivých priamok v novej súradnicovej sústave:
$p \equiv (t, 0, 0, 0)$
$q \equiv (0, s, 0, 1)$
$r \equiv (0, -1, -1 + u, -1)$.

Ďalej postupujeme podobne ako minule:
$\overrightarrow{XY} = (-t, s, 0, 1)$
$\overrightarrow{XZ} = (-t, -1, -1 + u, -1)$.
Ak porovnáme posledné súradnice, hneď vidíme, že ak jeden vektor má byť násobok druhého, musí to byť (-1)-násobok. Preto $(-t, s, 0, 1) = -(-t, -1, -1 + u, -1) = (t, 1, u - 1, 1)$. Z tejto rovnosti hneď vidíme, že $t = 0$, $s = 1$ a $u = 1$, čiže sme dostali presne tie isté body ako minule.

Nevýhoda tohoto postupu: dosť pracne sme vyrátali maticu prechodu.

Výhoda: Vopred sme vedeli, že nám rovnice jednotlivých priamok vyjdú „pekne“ (tak sme zvolili súradnicový systém). V prvom prípade sme mali tak trochu šťastie, že nám všetko pekne vypadlo a hneď sme vyrátali hodnotu k.