1 Vzdialenosť 2 afinných podpriestorov

Ukážeme si 3 rôzne možnosti, ako vyrátať vzdialenosť priamky a nadroviny v $\mathbb{R}^4$. (Samozrejme, návrhy na iné riešenia sú vítané.)

Úloha 1. Vyrátajte vzdialenosť priamky p a roviny α v $\mathbb{R}^4$, ak priamka p je určená bodom $A = (1,0,1,0)$ a smerovým vektorom $\vec{u} = (0,1,1,1)$ a rovina α je určená bodom $B = (1,2,3,4)$ a vektormi $\vec{v} = (1,1,0,0)$ a $\vec{w} = (0,0,1,1)$.

Riešenie pomocou strednej priečky. Pretože dané afinné podpriestory sú mimobežné, podľa vety z prednášky existuje vektor $\overrightarrow{PQ}$, taký, že $P \in p$, $Q \in \alpha$, $\overrightarrow{PQ}$ je kolmý na vektorové zložky oboch afinných podpriestorov a jeho veľkosť je práve vzdialenosť týchto afinných podpriestorov. (Priamka PQ sa nazýva *stredná priečka.*)

Parametrické vyjadrenia sú
$p = \{P = A + s\vec{u}\}$,
$\alpha = \{Q = B + t\vec{v} + u\vec{w}\}$,
z čoho dostaneme

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + t\vec{v} + u\vec{w} - s\vec{u} = (t, 2-s+t, 2-s+u, 4-s+u)$$

Podmienku, že $\overrightarrow{PQ}$ je kolmý na vektorové zložky oboch priestorov môžeme vyjadriť pomocou skalárneho súčinu: $\overrightarrow{PQ}.\vec{u} = \overrightarrow{PQ}.\vec{v} = \overrightarrow{PQ}.\vec{w} = 0$. Z toho dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 8 - 3s + t + 2u &= 0,\\ 2 - s + 2t &= 0,\\ 6 - 2s + 2u &= 0, \end{aligned}$$

z ktorej vyrátame $t = 0$, $s = 2$, $u = -1$.

Preto

$$\varrho(p,\alpha) = \overrightarrow{PQ} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Riešenie pomocou minimalizácie vzdialenosti. Podľa definície je $\varrho(p,\alpha) = \min\{|XY|; X \in p, Y \in \alpha\}$. Ak vyjadríme parametricky priamku a rovinu, tak vieme vyrátať $|XY|$ ako funkciu parametrov a potom stačí nájsť minimum tejto funkcie.

Parametrické vyjadrenia sú
$p = \{X = A + s\vec{u}\}$,
$\alpha = \{Y = B + t\vec{v} + u\vec{w}\}$,
z čoho dostaneme

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB} + t\vec{v} + u\vec{w} - s\vec{u} = (t, 2-s+t, 2-s+u, 4-s+u)$$
$$|XY|^2 = t^2 + (2-s+t)^2 + (2-s+u)^2 + (4-s+u)^2$$

Zaujímajú nás hodnoty parametrov s, t, u, pre ktoré je táto hodnota minimálna. Neskôr sa budete učiť všeobecnú metódu na hľadanie extrémov funkcie viac premenných (Lagrangeove multiplikátory), v tomto prípade si však poradíme pomerne jednoducho. Ak si všimneme, že posledné 2 členy možno zapísať ako $(3-s-u-1)^2 + (3-s-u+1)^2$, tak po úprave máme

$$|XY|^2 = t^2 + (2-s+t)^2 + 2(3-s+u)^2 + 2.$$

Preto určite platí $|XY|^2 \geq 2$ (pretože k dvojke sme pripočítali druhé mocniny reálnych čísel, ktoré sú určite kladné). Na druhej strane, ak nájdeme hodnoty parametrov, pre ktoré platí $t = 2 - s + t = 3 - s + u = 0$, tak sa táto hodnota aj nadobúda. Hneď vidíme, že sú to $t = 0$, $s = 2$, $u = -1$. Dostali sme teda $\varrho(p, \alpha) = \sqrt{2}$.

(Môžeme aj skontrolovať, že body, ktoré zodpovedajú vypočítaným hodnotám parametra sú $X = (1, 2, 3, 2)$, $Y = (1, 2, 2, 3)$. Skutočne platí $X \in p$, $Y \in \alpha$ a $|XY| = \sqrt{2}$.)

Riešenie pomocou pomocnej nadroviny. Uvažujme nadrovinu β, ktorá obsahuje α a je rovnobežná s p. Teda β je určená bodom B a vektormi $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Pretože $\alpha \subseteq \beta$ platí $\varrho(p, \alpha) \geq \alpha(p, \beta)$. (Vyplýva to z toho, že $\{|XY|; X \in p, Y \in \alpha\} \subseteq \{|XY|; X \in p, Y \in \beta\}$ a teda $\min\{|XY|; X \in p, Y \in \alpha\} \geq \min\{|XY|; X \in p, Y \in \beta\}$.)

Platí aj obrátená nerovnosť. Ak totiž $X \in p$, $Y \in \beta$, tak máme

$$X = A + p\vec{u},$$
$$Y = B + q\vec{u} + r\vec{v} + s\vec{w}.$$

Potom môžeme definovať body:

$$X' = A + (p - q)\vec{u}$$
$$Y' = B + r\vec{v} + s\vec{w}.$$

Pre tieto body platí $\varrho(X, Y) = \varrho(X', Y')$ a $X' \in p$, $Y' \in \alpha$. Teda platí aj opačná inklúzia $\{|XY|; X \in p, Y \in \alpha\} \supseteq \{|XY|; X \in p, Y \in \beta\}$ a $\varrho(p, \alpha) \leq \alpha(p, \beta)$.

Nadrovina β je určená parametrickým vyjadrením $x_1 = q$, $x_2 = p + q$, $x_3 = p + s$, $x_4 = p + s$. Z toho dostaneme všeobecnú rovnicu

$$x_3 - x_4 + 1 = 0$$

a z nej dostaneme vzdialenosť

$$\varrho(p, \alpha) = \varrho(A, \beta) = \frac{|1 - 0 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Riešenie pomocou priemetu priamky. Všeobecné rovnice roviny β sú

$$x_1 - x_2 + 1 = 0$$
$$x_3 - x_4 + 1 = 0$$

teda má normálové vektory $\vec{n}_1 = (1, -1, 0, 0)$ a $\vec{n}_2 = (0, 0, 1, -1)$.
Všeobecné rovnice roviny α môžeme zapísať (pomocou skalárneho súčinu) v tvare:

$$X.\vec{n}_1 = -1$$
$$X.\vec{n}_2 = -1$$

Ľubovoľný bod priamky p môžeme vyjadriť ako $X = A + t\vec{u}$. Pokúsme sa preň nájsť kolmý priemet. (Tým získame niečo ako priemet priamky p do roviny α.)

Kolmopremietací priestorom je určený bodom X a vektormi $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$. Má teda parametrické vyjadrenie
$X + a\vec{n}_1 + b\vec{n}_2$.

Kolmý priemet nájdeme ako prienik α s kolmopremietacím priestorom:

$$(X + a\vec{n}_1 + b\vec{n}_2).\vec{n}_1 = -1$$
$$(X + a\vec{n}_1 + b\vec{n}_2).\vec{n}_2 = -1$$

Pretože $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$ a $\vec{n}_1.\vec{n}_1 = \vec{n}_2.\vec{n}_2 = 2$, po úprave dostaneme

$$X.\vec{n}_1 + 2a = -1$$
$$X.\vec{n}_2 + 2b = -1$$

z čoho:
$a = \frac{-1-X.\vec{n}_1}{2} = \frac{-1-A.\vec{n}_1-t\vec{u}.\vec{n}_1}{2} = \frac{-2+t}{2} = -1 + \frac{t}{2}$.
$b = \frac{-1-X.\vec{n}_2}{2} = \frac{-1-A.\vec{n}_2-t\vec{u}.\vec{n}_2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.
(Využili sme, že $\vec{u}.\vec{n}_1 = -1$ a $\vec{u}.\vec{n}_2 = 0$.)
Označme kolmý priemet ako Y. Potom

$$\overrightarrow{XY} = a\vec{n}_1 + b\vec{n}_2 = (-1 + \frac{t}{2}, 1 - \frac{t}{2}, -1, 1)$$
$$|XY|^2 = 2\left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 + 2$$

Táto funkcia nadobúda minimum pre $t = -2$ a toto minimum má hodnotu 2. Preto $\varrho(p, \alpha) = \sqrt{2}$.