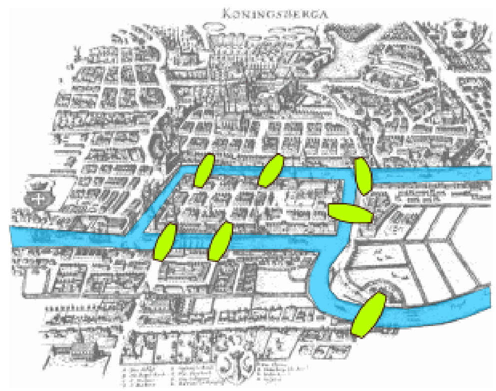
Kreslenie jedným ťahom - Eulerovské grafy

Sedem mostov Kráľovca

Leonard Euler
(1707 - 1783)



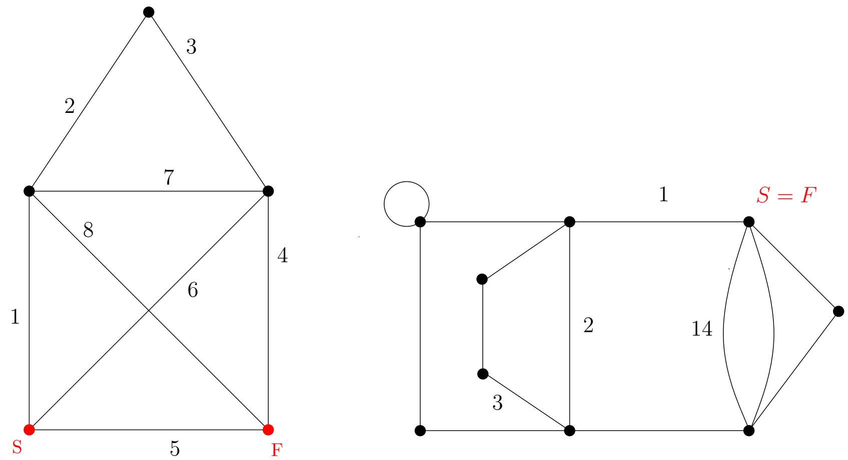
Kráľovec v 18 st.

Problém Je možné prejsť sa Kráľovcom tak, aby sme každým mostom prešli presne raz a prechádzku skončili na mieste kde sme ju začali?

Všeobecnejšie: Ktoré grafy je možné nakresliť jedným uzavretým /otvoreným ťahom bez toho, aby sme zdvihli pero z papiera (pričom žiadnu hranu neobkreslíme dvakrát)?

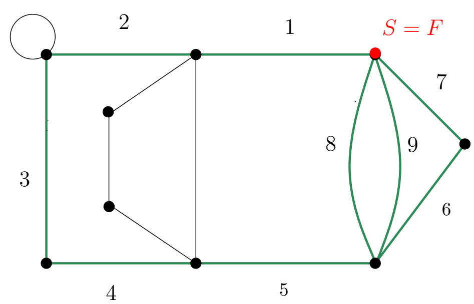
Akademickejšie: Nájde sa v grafe G prechádzka ktorá začína a končí v tom istom vrchole a každú hranu obsahuje presne raz? Takú prechádzku budeme nazývať *uzavretá eulerovská prechádzka.*

Príklad Domček a mesto N jedným ťahom na prvý pokus.



Obr. 1: Domček a mesto N na prvý pokus

Ako riešiť situáciu znázornenú na obrázku 2, keď sa prvý pokus skončil neúspechom?



Obr. 2: mesto N, prvý pokus nevyšiel

Vyložíme pojmy potrebné ku riešeniu podobných situácií ako na obrázku 2.

Pripomeňme si, že

prechádzka v grafe G z vrchola a do vrchola b je striedavá postupnosť

$$a = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k = b, \quad \text{kde } e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \quad \text{pre } i = 1, \ldots, k$$

vrcholov a hrán grafu G. Ak počiatočný a koncový vrchol prechádzky sú totožné, hovoríme že prechádzka je *uzavretá*.

cesta v grafe G z vrchola a do vrchola b je prechádzka, v ktorej sa každý vrchol vyskytuje najviac raz

Pozorovanie. *Predpokladajme, že existuje cesta P z vrchola a do vrchola b a existuje cesta Q z b do vrchola c. Potom existuje cesta z a do c.*

Dôkaz. Ak P a Q majú jediný spoločný vrchol b, tak sa prejdeme po P z a do b a pokračujme po Q do c. Takto zreťazením ciest vo vrchole b dostaneme cestu z a do c.

V opačnom prípade cesty P a Q majú spoločných viac vrcholov, resp. viac hrán. Vtedy dostaneme prechádzku, ktorá nie je cestou. Ako z toho von: vyberme sa z a po ceste P až prídeme ku prvému spoločnému vrcholu d s cestou Q. Ďalej pokračujeme po ceste Q do c. Potom

Úsek z a do d je úsekom cesty P a úsek z d do c je úsekom cesty Q, preto každý z týchto úsekov pozostáva z rôznych vrcholov.

Ukážeme, že jediným spoločným vrcholom týchto úsekov je vrchol d. Skutočne, d je prvý na Q na ktorý natrafíme keď ideme z a po P. Preto žiadny z vrcholov na tomto úseku cesty P nemôže ležať na Q. Hotovo

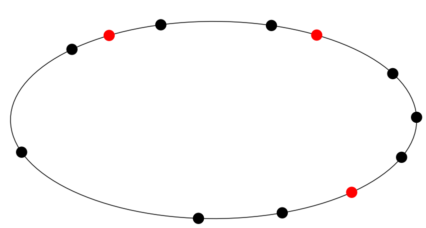
- Povieme, že graf je *súvislý*, ak sú ľubovoľné dva jeho vrcholy spojené cestou.

- Graf H sa nazýva *podgraf* grafu G, ak ho môžeme dostať z G vymazaním nejakých hrán (koncové vrcholy v grafe ponecháme), a/ alebo vymazaním niektorých vrcholov (vtedy vymažeme aj všetky hrany ktorých koncom je vynechaný vrchol). Samotný graf G považujeme za podgraf grafu G.

- *Komponenta súvislosti* grafu G je maximálny súvislý podgraf grafu G.

Máme všetko pripravené ku riešeniou úlohy z ktorej sme vyšli.
Predpokladajme, že v grafe G exituje uzavretá eulerovská prechádzka. Potom každý vrchol v G má párny stupeň.

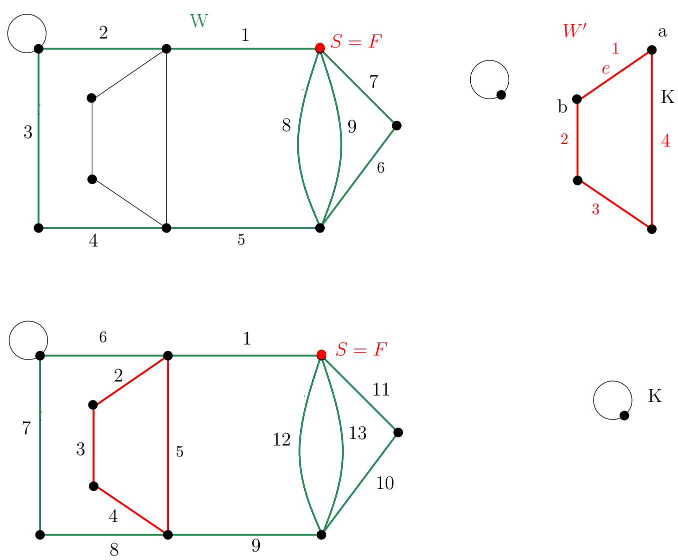
Presvedčme sa o tom. Zvolme vrchol, povedzme v, prejdime sa z v po W, pričom si značíme každý výskyt v. Každý takýto výskyt prispieva číslom 2 ku stupňu v, preto v má párny stupeň, pre všetky vrcholy G. Hotovo
Prechádzka a výskyty $v =$ červený vrchol sú schematicky znázornené na obr. 3.



Obr. 3: vrchol $v =$ červený vrchol na prechádzke W

Veta 1(Euler, 1736) *Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf a nech každý vrchol G má párny stupeň. Potom G obsahuje uzavretú eulerovskú prechádzku.*

Dôkaz. Požadovanú prechádzku zostrojíme. Zvolme vrchol, ozn. ho S, a postupujme z S po neprejdených hranách grafu G až kým prídeme do vrchola w, z ktorého nie je možné pokračovať. Zostrojenú prechádzku ozn. W.
Ukážeme, že $w = S$. Predpokladajme opak, nech teda $w \neq S$. Uvážme krok pred posledným príchodom do w. Vždy keď sme do w prišli, tak sme aj odišli čo celkovo prispieva párnym číslom ku stupňu w. Hrana posledného príchodu prispieva jednotkou, dostali sme spor s paritou stupňov grafu G.
Pre zostrojenú prechádzku W na stane jedna z možností
1 W obsahuje všetky hrany grafu G a dôkaz je ukončený.
2 Existuje hrana $e = \{a, b\}$ ktorá nepatrí do W a zasahuje do W. Vtedy vynechajme všetky hrany prechádzky W z grafu G. Dostaneme graf G', pričom každý jeho vrchol má párny stupeň.
Uvažujeme komponentu K grafu G', v ktorej leží hrana e. V komponente K sú všetky vrcholy párneho stupňa. Preto, podobne ako pred chvíľou, môžeme zostrojiť precházku v komponente K, ktorá začína vo vrchole a, pokračuje hranou e do b a končí v a. Označme ju W'. Situácia je znázornená na obrázku 4



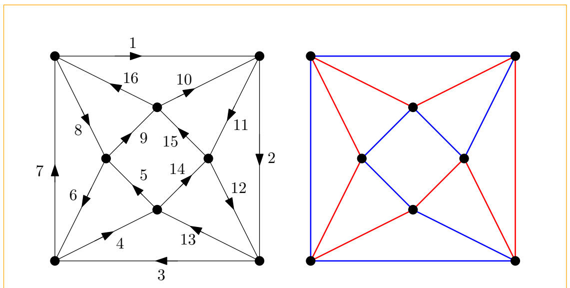
Obr. 4: Ilustrácia dôkazu Vety 1

Prechádzky W a W' zlepíme vo vrchole a nasledovným spôsobom: vyštartujeme z S, pokračujeme po W do a, teraz sa prejdeme z a do a po W' a pokračujeme po W do S. Dostaneme prechádzku, ktorá obsahuje W aj W', každú ich hranu presne raz. Iterujeme.
Takto, po konečnom počte iterácií zostrojíne uzavretú eulerovskú prechádzku v grafe G. Hotovo

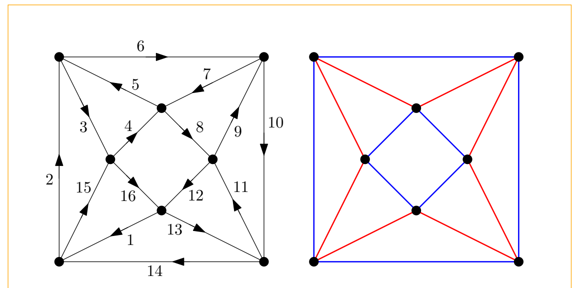
Naše úvahy uzavrieme otvoreným problémom o eulerovských grafoch.

Hypotéza.(L. Sabidusi) Nech G je eulerovský graf, stupeň každého jeho vrchola je aspoň 4 a nech W je uzavretý eulerovský ťtah v G. Potom existuje taký rozklad hrán G na kružnice, že žiadna kružnica neobsahuje dve po sebe idúce hrany, ktoré by boli po sebe idúce aj vo W.

Príklad. Uzavretý eulerovský sled a odpovedajúci požadovaný rozklad hrán do kružníc.



Ťah W_1 Rozklad R_1



Ťah W_2 Rozklad R_2