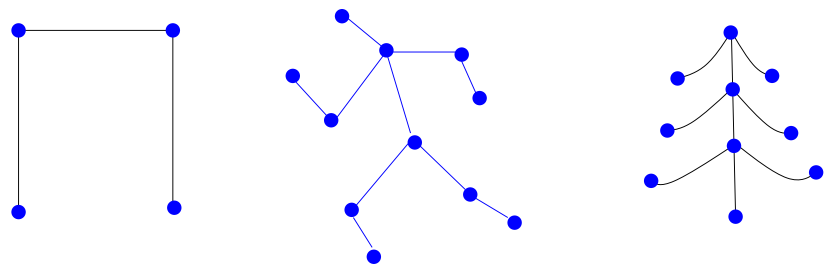
Stromy

Niekoľko stromov namiesto úvodu



Obr. 1: cesta, bežec, jedľa

Definícia. Strom je súvislý graf, ktorý neobsahuje kružnicu ako podgraf.

Náš program:
- preskúmame vlastnosti stromov
- experimentálne zistíme aká veľká je množina všetkých stromov na danej množine vrcholov
- podáme riešenie úlohy o optimálnom strome
- odvodíme formulu pre počet stromov.

Ako popísať strom. Pohľad na stromy napovedá, že by mohli platiť nasledovné tvrdenia

1. Vynechaním ľubovoľnej hrany zo stromu vznikne nesúvislý graf.

2. Spojením ľubovolných dvoch nesusedných vrcholov stromu hranou vznikne graf s jedinou kružnicou, pričom pridaná hrana leží na tejto kružnici.

3. Ľubovoľné dva vrcholy stromu sú spojené jedinou cestou.

4. Strom na viac ako dvoch vrcholoch má aspoň dva vrcholy stupňa 1.

5. V strome je počet hrán o 1 menší ako počet vrcholov, t. j. $|E| = |V| - 1$.

Na ukážku odvodíme platnosť

Tvrdenie 1. Strom na aspoň dvoch vrcholoch má aspoň dva vrcholy stupňa 1.

Dôkaz. Uvažujme strom T na aspoň dvoch vrcholoch. Strom je súvislý graf, preto každé dva vrcholy v T sú spojené cestou.

Nech P je **najdlhšia** cesta v T. Potom

koncové vrcholy u, v cesty P majú stupeň 1

Skutočne, T nemá kružnicu a preto u má na P jediného suseda, a podobne v. Kedže P je najdlhšia cesta v G vrchol, ktorý neleží na P nie je spojený hranou s koncovým vrcholom cesty P. Záver: Našli sme dva vrcholy, u a v, s požadovanou vlastnosťou. Hotovo.

Tvrdenie 2. Graf $T = (V, E)$ je strom práve vtedy keď je súvislý a $|E| = |V| - 1$.

Dôkaz. **1.** Odvodíme platnosť implikácie "$\Rightarrow$", postupujeme indukciou podľa počtu n vrcholov stromu T.

Pre $n = 1, 2$ tvrdenie platí, lebo $T = K_1$, resp. $T = K_2$.
Nech tvrdenie platí pre všetky stromy na $n \geq 2$ vrcholoch, a uvažujme strom T na $n + 1$ vrcholoch.

Podľa Tvrdenia 1, T má vrchol stupňa 1, pomenujme ho v. Vrchol v má jediného suseda v strome T, nech je to vrchol u.

Vynechajme hranu $\{v, u\}$ z T. Dostaneme

súvislý podgraf T', ktorý nemá kružnicu a teda je strom.

Podľa indukčného predpokladu

strom T' má $n - 1$ hrán, čo spolu s hranou $\{v, u\}$ dáva všetky hrany stromu T.

Teda T má $(n-1)+1=n$ hrán, čo bolo treba ukázať.

2. Odvodíme platnosť implikácie "$\Leftarrow$". Nech teda G je súvislý graf, a nech $|E| = |V| - 1$. Ukážeme, že G nemá kružnicu. Postupujeme nepriamo,

nech C je kružnica v grafe G a nech e je hrana na C

Potom graf

$G' = G \setminus \{e\}$ je s súvislý a $|EG'| < |EG|$

Nastane jedna z možností:

1. G' nemá kružnicu a keďže je súvislý, je to strom. Potom

$|EG'| = (|EG| - 1) - 1 = |VG| - 2$ a $|VG|$ vrcholov.

Odvodili sme spor s platnosťou implikácie "$\Rightarrow$".

2. G' má kružnicu C a sme v situácii ako na začiatku.

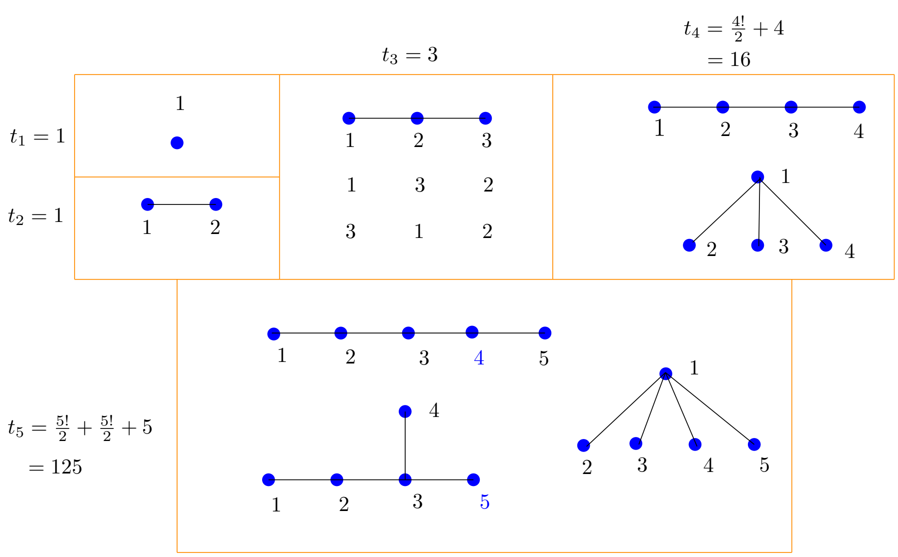
Iterujeme.

Po konečnom počte krokov prídeme ku súvislému grafu bez kružnice, teda ku stromu, ktorý má menej hrán ako je počet vrcholov mínus 1. To je spor s platnosťou implikácie "$\Rightarrow$". Koniec dôkazu.

Problém. Aký je počet t_n všetkých stromov na n vrcholoch?

Dohoda: dva stromy považujeme za rovnaké ak majú rovnakú množinu vrcholov a aj rovnakú množinu hrán. Inak povedané, keď sú totožné.

Experiment s malým n:



Experimentom s malým n prichádzame ku hypotéze: počet stromov na n vrcholoch je rovný n^{n-2}. Nasledujúca veta tvrdí, že je to skutočne tak.

Veta(Cayley). Počet t_n stromov na $n \geq 2$ je rovný n^{n-2}.

Napriek tomu, že pre t_n vyjde taká jednoduchá formula, nie je známy žiadny celkom priamočiary spôsob ako ju odvodiť. Je známych niekoľko dôkazov, každý založený na inej základnej myšlienke. Jeden z nich si predstavíme. Budeme sledovať dôkaz z Proofs from THE BOOK, založený na takejto myšlienke

Ak existuje bijekcia z množiny A do množiny B, tak $|A| = |B|$.

Problém pri takejto stratégii je násť vhodnú množinu A pre množinu

$$T_n = \{\text{stromy na } V = \{1, \ldots, n\}\}$$

.

Teraz sa prepneme do Proofs from THE BOOk a budeme študovať dôkaz.