Diskrétna matematika 2

1mat, LS 2022/ 23

Úvodná prednáška

• Čomu sa budeme venovať: volné pokračovanie Diskrétnej matematiky 1, kde základnou témou bola *mohutnosť* množiny. Presnejšie, úlohou je pre dané dve *nekonečné* množiny A, B zistiť či

$$|A| \leq |B|, \quad |A| < |B|, \quad |A| = |B|$$

t.j. zistiť či *existuje* zobrazenie $f : A \to B$ ktoré je prosté, prosté ale nie surjektívne, prosté aj surjektívne a teda bijektívne.

Mágia nekonečna: veľkosť časti = veľkosť celku

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$

Porovnanie mohutnosti $|\mathbb{A}|$ množiny $\mathbb{A}$ algebraických čísel a mohutnosti $|\mathbb{T}|$ množiny $\mathbb{T}$ transcendentných čísel

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{T}| > |\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|,$$

prekvapujúci výsledok, keďže do poloviny 19-teho storočia nebolo známe žiadne transcendentné číslo.

Diskrétna matematika 2: prepneme sa z nekonečných množín na *konečné* množiny, od amorfných množín bez štruktúry prejdeme ku množinám so *štruktúrou*, t.j. so špecifickými vlastnosťmami, ako napríklad usporiadanie. *Téma* zostáva rovnaká: určte veľkosť $|M|$ množiny M

Niekoľko úloh na úvod

1. Bilaterálne rokovania. Navrhnite rozvrh bilaterálnych rokovaní piatich senátorov A B, C, D, E, ktorý vyhovuje zadaniu: jeden z účastníkov každého rokovania(okrem posledného rokovania)sa zúčastní na nasledujúcom rokovaní a nikto sa nezúčastní troch po sebe idúcich rokovaní. Rokovať zamýšľa senátor A so senátormi B, C, E; senátor B so senátormi A, C, D, E; senátor C s A, B, D, E; senátor D so senátormi B, C; senátor E so senátormi A, B, C.

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	1
B	1	0	1	1	1
C	1	1	0	1	1
D	0	1	1	0	0
E	1	1	1	0	0

2. Vo voľbách do AS FMFI študentská časť, sa rozhodovalo medzi dvomi kandidátmi - Ivanom a Katkou. Hlasovania sa zúčastnilo 100 študentov. Aká je pravdepodobnosť, že počas volieb mala Katka vždy aspoň toľko hlasov ako Ivan? Hlasy sa sčitovali po každom hlasovaní, a voliči sa pre svojho favorita rozhodovali náhodne.

3. Majme $n \geq 1$ priamok v rovine. Aký je najmenší počet $c(n)$ farieb ktorými možno zafarbiť časti roviny určené týmito priamkami tak, aby susedné časti mali rôznu farbu?(Dve časti roviny považujeme za susedné ak sú oddelené priamkou, alebo polpriamkou, alebo úsečkou.)

4. V rovine je daných 5 bodov, pričom žiadne tri neležia na tej istej priamke. Potom štyri z nich tvoria vrcholy konvexného štvoruholníka. Dokážte. Ako by to dopadlo, keby sme chceli garantovať konvexný 6-uholník?

Diskusia o charaktere predstavených úloh, zasadenie do širšieho kontextu, riešenie…

Kombinatorika - umenie počítať

• Čomu sa budeme venovať: úlohy na počet prvkov (konečnej) množiny, pričom táto množina je vybavená istou štruktúrou, napríklad usporiadaním, priradením a pod. Zaujíma nás, či sa v tejto množine nájde aspoň jedno usporiadanie, ktoré vyhovuje daným požiadavkám. Ak áno, pýtame sa koľko je takýchto usporiadaní= základná téma kombinatoriky.
Úlohy takéhoto typu sa vyskytujú naprieč matematikou, typickým zdrojom je klasická (=diskrétna) teória pravdepodobnosti, tiež informatika, teória čísel, geometria a algebra.

• Metódy ktorými riešime kombinatorické úlohy zahŕňajú matematickú indukciu, metódy sita, generujúce funkcie a tiež niekoľko jednoduchých *princípov*, ktoré sú zovšeobecnením našej skúsenosti s počítaním. Napokon, ad–hoc argumenty, ktoré odzrkadľujú mieru pochopenia riešeného problému, kreativitu ...

• Literatúra

1. M. Aigner, A Course in Enumeration, Grad. Texts in Math., Springer 2007, ISBN 978-3-540-39032-4

2. J. Matoušek, J. Nešetřil, Kapitoly z diskrétmí matematiky, UK Praha, Karolinum 2000

3. M. Knor, Kombinatorika a Teória grafov, UK Bratislava, 2000

4. M. Aigner, G. M. Ziegler: Proofs from THE BOOK, Springer 2000

• Ako budeme pracovať, hodnotenie

Študent môže v rámci semestra získať najviac 90 bodov. Maximálne 30 bodov na základe prezentácie riešenia úloh z cvičení, maximálne 30 bodov na základe riešenia/ prezentácie riešenia úloh zadaných na doma a maximálne 30 bodov na základe prezentácie samostatne naštudovaných úloh. Skúška pozostáva z písomky, následnej spoločnej opravy písomky so skúšajúcim, pričom skúšajúci môže položiť doplňujúce otázky k úlohám z písomky.

Podľa sumy bodov získaných počas semestra získava hodnotenie

Počet bodov	Známka
Od 80	A=1
Od 70	B=1,5
Od 60	C=2
Od 50	D=2,5
Od 40	E=3
Menej ako 40	FX=3,5

Hodnotenie za semester odpovedajúce známke A, B znamená, že sa nemusíte zúčastniť písomnej časti skúšky a hodnotenie si môžete nechať zapísať ako celkové hodnotenie predmetu. Výsledná známka študenta, ktorý sa písomnej skúšky zúčastnil sa určí ako priemer hodnotenia za semester a za skúšku. Hodnotenie FX za skúšku znamená, že je potrebné absolvovať opravný termín skúšky.