

## Cvičenie 1

1. Majme tabuľku čokolády s  $m \times k$  štvorčkami. Postupne ju budeme lámať na kúsky nasledujúcim spôsobom: v každom kroku si zvolíme kúsok ktorý má aspoň dva štvorčeky a rozložíme ho podľa vodorovnej alebo zvislej linajky (linajky tvoria štvorčekovú mozaiku čokolády). Skončíme keď je čokoláda polámaná na štvorčeky. Ako dlho nám bude trvať kým čokoládu polámeme?
2. Majme  $n \geq 1$  priamok v rovine. Aký je najmenší počet farieb ktorými možno ofarbiť časti roviny určené týmito priamkami tak, aby susedné časti mali rôznu farbu?(Dve časti roviny považujeme za susedné ak sú oddelené priamkou, alebo polpriamkou, alebo úsečkou.)
3. V čakárni u lekára je  $n$  pacientov, každý z nich si vezme číslo medzi 1 a  $n$ . Predtým ako lekár začal ordinovať, sestrička povedala pacientom, že sice nemusia byť vyšetrení v poradí určenom číslami, ale že pred žiadnym z nich nebude vyšetrených viac pacientov než by bolo keby sa dodržiavalo poradie podľa čísel; teda pred pacientom s číslom  $i$  môže byť vyšetrených najviac  $i - 1$  pacientov. Keď to počul pán Mrkvička, tak povedal:”Hmm, to je to isté ako keby sa poradie podľa čísel rešpektovalo.” Mal pravdu?
4. V istom meste sa nedávno rozhodli vybudovať desať križovatiek. Na niektoré z nich chcú umiestniť svetelnú signalizáciu, a na niektorých z tých ktoré vybaví svetelnou signalizáciou chcú vybudovať čerpaciu stanicu. Koľkými spôsobmi môžu realizovať svoj zámer? (Vyjadrenie ”niektoré” pripúšťa možnosť žiadne, napr. kvôli finančným dôvodom.)
5. Kombinatorickou úvahou dokážte:

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$

6. Uvažujme rovnostranný trojuholník s dĺžkou strany  $n$ , ktorý je rozdelený na jednotkové trojuholníky tak ako na obrázku pre  $n = 5$ . Nech  $f(n)$  počet ciest z horného trojuholníka do trojuholníka v strede posledného riadku, pričom susedné trojuholníky na ceste majú spoločnú stranu, cesta nikdy nejde zdola nahor (z nižšieho riadku do vyššieho) a nikdy nevedie do trojuholníka ktorý už navštívila. Na obrázku je vyznačená jedna takáto cesta pre  $n = 5$ . Určte  $f(2016)$ .

