Cvičenie 2 (Dom. úloha 2 k cvičeniu 2 nie je)

1. Povieme, že podmnožina danej množiny je párna ak má párny počet prvkov, v opačnom prípade je nepárna. Pomocou princípu bijekcie dokážte, že pre neprázdnu množinu sa počet jej párnych podmnožín zhoduje s počtom jej nepárnych podmnožín.

2. Uvažujme konvexný n-uholník v ktorom sa žiadne tri diagonály nepretínajú (vrchol n-uholníka nepovažujeme za priesečník). V koľkých bodoch sa pretínajú diagonály uvažovaného n-uholníka?

3. Kombinatorickou úvahou dokážte:

$$\sum_{i=1}^{n} i(n-i) = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

4. Kombinatoricky dokážte: Pre $n \geq 1$ platí

$$(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = x^n - 1.$$

5. Koľkými spôsobmi môžeme ofarbiť prvky matice $1 \times n$ modrou, červenou a bielou farbou tak, aby počet prvkov ofarbených červenou farbou bol párny? A koľkými ak ich počet má byť nepárny?(Bez použitia binom. vety.)

6. Pre $n \in \mathbb{N}$ je hodnota Eulerovej funkcie $\Phi(n)$ definovaná ako počet tých prirodzených čísel neprevyšujúcich n ktoré sú s n nesúdeliteľné, pričom kladieme $\Phi(1) = 1$. Napríklad, pre prvočíslo p máme $\Phi(p) = p - 1$. Ukážte, že pre $n \geq 3$ je $\Phi(n)$ párne číslo.(Bez použitia vzorca pre výpočet $\Phi(n)$.)