Kombinatorické počítanie

1. Dokážte kombinatorickou úvahou a tiež pomocou binomickej vety:

   a) $\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}$.

   b) $\binom{m+n}{k} = \sum_{j=o}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$ $(m, n \geq 0)$.

2. Dokážte:

   a) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$.

   b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

3. Nech n, m sú prirodzené čísla, $m \leq n$. Vyjadrite vzorcom bez použitia sumy:

   a) $\sum\limits_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k}$

   b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{k}{m}\frac{1}{k}$

4. Odvoďte nasledujúcu vlastnosť postupnosti $\binom{n}{k}$ pre $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n}.$$

   Riadky Pascalovho trojuholníka predstavujú príklad *unimodálnej* postupnosti, ktorá je tvorená najskôr neklesajúcim úsekom a potom nerastúcim úsekom. S takýmito postupnosťami sa ešte stretneme v priebehu semestra. Formálna definícia: Postupnosť $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ je *unimodálna* ak existuje $j \in \{0, \ldots, n\}$ také, že platí

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_j \geq a_{j+1} \cdots \geq a_n.$$

   Zavedieme ešte jeden pojem: postupnosť $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ reálnych čísel sa nazýva *logaritmicky konkávna*, ak pre každé $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ platí $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$. Ak je naša postupnosť kladná, logaritmovaním prídeme k ekvivalentnej podmienke

$$\frac{\log a_{k-1} + \log a_{k+1}}{2} \leq \log a_k,\ \ k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

   Geometrický význam tohto faktu nám hovorí odkiaľ pochádza názov "logaritmicky konkávna" (Premyslite si to.) Príkladom logaritmicky konkávnej postupnosti sú riadky Pascalovho trojuholníka, o čom sa ľahko presvedčíme algebraickou manipuláciou. Uvedené dva typy postupností dáva do súvisu nasledujúce tvrdenie.

5. Platí: Každá kladná logaritmicky konkávna postupnosť je unimodálna.