Cestovanie v mriežke

1. Nech k, n sú kladné celé čísla a $k < n/2$. Nájdite injekciu z množiny všetkých ciest v mriežke z bodu $(0,0)$ do bodu $(k, n-k)$ do množiny všetkých ciest z $(0,0)$ do $(k+1, n-k-1)$. (V mriežke cestujeme štandardne s krokom sever/východ.) Akú vlastnosť postupnosti $\binom{n}{k}_{k=0}^{n}$ sme týmto ukázali?

2. Pomocou štandardného cestovania v mriežke s krokom sever/východ dokážte, že riadok Pascalovho trojuholníka tvorí logaritmicky konkávnu postupnosť, t.j. ak k, n sú kladné čísla a $k \leq n$ tak
$$\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} \leq \binom{n}{k}^2.$$

3. Ukážte, že počet t_n ciest v mriežke z bodu $(0,0)$ do bodu (n,n) s krokom sever/východ, ktoré sa môžu dotýkať, ale nikdy nejdú nad diagonálu (i,i) $(i = 0, \ldots, n)$ je rovný $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Potom ukážte, že
$t_n = \sum_{i=1}^{n} t_{i-1} \cdot t_{n-i},\ t_0 = 1.$
Poznámka: Čísla $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sa nazývajú *Catalanove* čísla, podľa francúzskeho matematika 19-teho storočia, Eugena Catalana. V učebnici Stanley, R. (1999) "Enumerative Combinatorics", vol. 2, Cambridge University Press, v kapitole 6 je uvedený zoznam 150 rôznych úloh ktorých riešením sú Catalanove čísla. Zformulujeme ešte jeden príklad takéhoto typu.

4. Určte počet možností ako rozložiť konvexný $n+2$-uholník na trojuholníky diagonálami, ktoré sa nepretínajú (vo vnútri $n+2$-uholníka).

5. Ukážte, že počet možností ako rozložiť konvexný $n+1$-uholník na trojuholníky a presne jeden štvoruholník diagonálami, ktoré sa nepretínajú (vo vnútri $n+1$-uholníka) je rovný $\binom{2n-3}{n-3}$.

6. V mriežke cestujeme v smere na východ, na sever, a je povolený aj diagonálny krok z bodu (x, y) do $(x+1, y+1)$. Dokážte, že počet takýchto ciest z bodu $(0,0)$ do bodu (m, n)je rovný $\sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m}$.