Stirlingove čísla druhého druhu

1. Určte hodnotu $S_{n,3}$.
2. Dokážte: $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{S}_{k,m} = \mathrm{S}_{n+1,m+1}$.
3. Dokážte: $\binom{k+r}{r} \mathrm{S}_{n,k+r} = \sum_{i=k}^{n-r} \binom{n}{i} \mathrm{S}_{i,k} \mathrm{S}_{n-i,r}$.
4. Dokážte, že postupnosť $\{S_{n,k}\}_{k=0}^{n}$, je unimodálna pre každé $n \geq 0$, Hint: postupujte indukciou podľa n, využite rekurentný vzťah pre Stirlingove čísla druhého druhu, a fakt, že postupnosť $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ ktorá je logaritmicky konkávna (definovaná v cvičení 5), splňuje vzťah $a_{k-2} \cdot a_{k+1} \leq a_{k-1} \cdot a_k$ pre $2 \leq k \leq n-1$.
5. Dokážte: $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_{k,m}(m+1)^{n-k} = \mathrm{S}_{n+1,m+1}$.
   hint: na poradí blokov rozkladu nezáleží, preto prvky každého bloku zoraďme od najmenšieho po najväčší a bloky uvažujme rastúco vzhľadom na ich najmenší prvok. Rozklady klasifikujte podľa najmenšieho prvku v poslednom bloku.
6. Nájdite bijekciu z množiny všetkých ekvivalencií na n-prvkovej množine M, $n > 0$, do množiny všetkých rozkladov množiny M. Ilustrujte pre $M = \{1, 2, 3\}$. Takto ukážete, že počet všetkých ekvivalencií na n- množine je rovný Bellovmu číslu $B(n) = \sum_{k \geq 0} S_{n,k}$.