Stirlingove čísla $s_{n,k}$ prvého druhu

1. Pre celé číslo $n > 0$ je Harmonické číslo H_n definované predpisom $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ a $\mathrm{H}_0 = 0$. Ukážte, indukciou a tiež kombinatorickou úvahou, že $\mathrm{s}_{n+1,2} = n!\mathrm{H}_n$. Hint pre kombinatorickú úvahu: permutácie počítané v ľavej strane zapisujte tak, že v prvom cykle je číslo 1, a permutácie klasifikujte podĺa počtu prvkov v druhom cykle.

2. Ukážte indukciou (a pekné by bolo aj kombinatorickou úvahou): $\sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{s}_{n,k} = \mathrm{s}_{n+1,2}$.

3. Aký je priemerný počet cyklov náhodnej permutácie n-množiny? Zujíma nás hodnota výrazu $\frac{1}{n!}\sum_k k\,\mathrm{s}_{n,k}$.
   Riešte 1: vieme, že $x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_k \mathrm{s}_{n,k} x^k$, zderivujte obidve strany a potom zvoľte $x = 1$.
   Riešte 2: pomocou predchádzajúcich dvoch príkladov.
   Iný spôsob riešenia?

4. Pre $n \geq 2$ platí $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{s}_{n,k}(-1)^k = 0$ Dokážte. Hint: postup je analogický ako pre tvrdenie, že pre neprázdnu množinu je počet jej párnych podmnožín rovný počtu nepárnych podmnožín. Stačí danú permutáciu transformovať na permutáciu s počtom cyklov o 1 väčším, respektíve o 1 menším.

5. Označme i_n počet permutácií n-množiny ktoré majú len cykly dĺžky 1 alebo 2. Napríklad, $\mathrm{i}_1 = 1$, $\mathrm{i}_2 = 2$, $\mathrm{i}_3 = 4$. Ukážte, že $\mathrm{i}_{n+1} = \mathrm{i}_n + n\,\mathrm{i}_{n-1}$ ($i_0 = 1$). Potom ukážte, že i_n je párne číslo pre všetky $n \geq 2$.

6. Ukážte, že postupnosť $\mathrm{s}_{n,k}$, $k = 0, \ldots, n$, Stirlingových čísel prvého druhu je unimodálna.