Princíp inklúzie a exklúzie (krátko PIE)

1. Koľkými spôsobmi je možné usadiť v kine do jedného radu n manželských dvojíc tak, aby žiadni dvaja manželia nesedeli vedľa seba?(Rad v kine má $2n$ sedadiel.) Ako by to dopadlo pre usadenia okolo okrúhleho stola?

2. Ofarbime čísla od 1 po $2n$ modrou alebo červenou farbou takým spôsobom, že ak i je červené tak aj $i-1$ má červenú farbu. Pomocou toho dokážte:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}2^{2n-2k} = 2n+1.$$

3. Koľkými spôsobmi je možné rozdeliť n guličiek do m krabičiek tak, aby v každej krabičke bola aspoň jedna gulička? (Guličky aj krabičky sú rôzne.)

4. Označme symbolom D_n počet permutáciií množiny $\{1,\dots,n\}$ bez pevného bodu, t.j. takých permutácií, že $\pi(i) \neq i$ pre všetky i. Napríklad, $D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2$ a kladieme $D_0 = 1$.

   (1) Odvoďte rekurentný vzťah $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, $n \geq 2$. Pomocou predchádzajúceho vzťahu dokážte platnosť $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, kde $n \geq 1$.

   (2) Pomocou (1) odvoďte formulu pre výpočet D_n.

   (3) Pomocou PIE odvoďte formulu pre výpočet D_n.

   (4) Neformálna interpretácia úlohy?

5. Odvoďte vzorec pre výpočet hodnoty Eulerovej funkcie v bode n bez použitia PIE.

6. Partíciou prirodzeného čísla n rozumieme vyjadrenie čísla n v tvare $a_1 + \dots + a_k,\ k \geq 1, a_i \in \mathbb{N}$ pre všetky i, dve partície ktoré sa líšia len poradím sčítancov považujeme za rovnaké. Napríklad $5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1$ sú všetky partície čísla 5. Označme po rade $p(n), p_o(n), p_d(n)$ počet všetkých partícií čísla n, počet partícií v ktorých sa vyskytujú len nepárne sčítance a počet partícií v ktorých sú sčítance navzájom rôzne. Napríklad $p(5) = 7, p_o(5) = 3, p_d(5) = 3$. Dokážte, že $p_o(n) = p_d(n)$. Hint: Za základnú množinu zvolte množinu všetkých partícií čísla n. Najskôr uvažujte o $p_o(n)$: nech V_i je vlastnosť, že párne číslo i, $(i \leq n)$ sa vyskytuje v partícii. Pre $p_d(n)$ uvažujte vlastnosti V_i: i sa vyskytuje v partícii aspoň 2 razy. Porovnajte získané sumy člen po člene.