KOMBINATORIKA

Prednášajúci: RNDr. Jana Tomanová, CSc.

Katedra algebry a geometrie
FMFI UK

e-mail: jana.tomanova@fmph.uniba.sk

Ako budeme pracovať: sylaby, spôsob hodnotenia.
Na stránke oddelenia algebry a teórie čísel

thales.doa.fmph.uniba.sk

kliknite na Jana Tomanová, elektronické materiály, priečinok

Kombinatorika pre 1. ročník učiteľského štúdia

Tam nájdete

1. sylaby a v rámci nich spôsob hodnotenia, zoznam odporučenej literatúry.
2. Kombinatorika, Martin Sleziak, Jana Tomanová (podklad ku prednáške). Postupne počas semestra budú pribúdať podklady ku vybraným prednáškam, a podklady ku úlohám do cvičení.

Kombinatorika - umenie počítať

Kombinatorika je časť matematiky, ktorú môžeme charakterizovať ako *umenie počítať*. Prirodzene vzniká otázka:

1 Čo počítame – základné typy úloh, ktoré riešime, t.j. predmet kombinatoriky.

2 Ako počítame – metódy riešení kombinatorických úloh.

Budeme riešiť úlohy na *počet prvkov*(konečnej) množiny, pričom táto množina bude vybavená istou štruktúrou, napríklad usporiadaním, priradením a pod. Zaujíma nás, či sa v tejto množine nájde aspoň jedno usporiadanie, ktoré vyhovuje daným požiadavkám. Ak áno, pýtame sa koľko je takýchto usporiadaní= *dve témy kombinatoriky.*

Spočítavanie

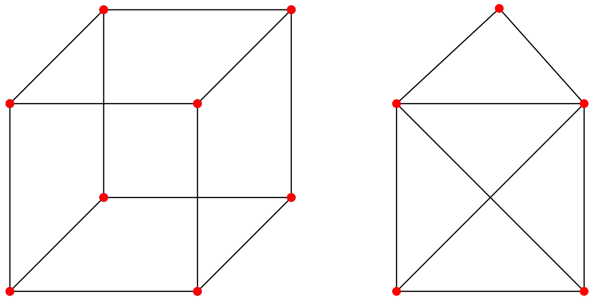
Tri na ukážku:

1. Do manéže nastupuje v rade za sebou 18 zverov, z ktorých je 5 levov, 6 tigrov a 7 leopardov. Koľko je rôznych nástupov ak žiadne dva tigre nesmú ísť bezprostredne za sebou?

2. Vo voľbách do AS FMFI študentská časť, sa rozhodovalo medzi dvomi kandidátmi - Ivanom a Katkou. Hlasovania sa zúčastnilo 100 študentov. Aká je pravdepodobnosť, že počas volieb mala Katka vždy aspoň toľko hlasov ako Ivan? Hlasy sa sčitovali po každom hlasovaní, a voliči sa pre svojho favorita rozhodovali náhodne.

3. Aký najväčší počet kúskov pizze môžeme dostať keď rez nožom vždy vedieme priamočiaro? Akademickejšie: Aký je najväčší počet $f(n)$ častí roviny, ktoré sú určené n priamkami v rovine? (Prvý raz riešené r. 1826, švajčiarskym matematikom Jacobom Steinerom)

Existencia



Obr. 1: mesto Kocka, mesto Domček

Dve na zahriatie:

1. Navrhnite okružnú prechádzku mestom, alebo vysvetlite prečo taká prechádzka nie je možná.

2. Bilaterálne rokovania. Navrhnite rozvrh bilaterálnych rokovaní piatich senátorov A B, C, D, E, ktorý vyhovuje zadaniu: jeden z účastníkov každého rokovania(okrem posledného rokovania)sa zúčastní na nasledujúcom rokovaní a nikto sa nezúčastní troch po sebe idúcich rokovaní. Rokovať zamýšľa senátor A so senátormi B, C, E; senátor B so senátormi A, C, D, E; senátor C s A, B, D, E; senátor D so senátormi B, C; senátor E so senátormi A, B, C.

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	1
B	1	0	1	1	1
C	1	1	0	1	1
D	0	1	1	0	0
E	1	1	1	0	0

Existencia nekonštruktívne

Štyri na zahriatie:

1. Vo vrecku je osem guličiek, každá je modrá, alebo červená. Koľko guličiek treba nabrať aby sme si mohli byť istí že máme v hrsti aspoň dve guličky rovnakej farby?
2. Sme trinásti. Nájdu sa medzi nami dvaja narodení v tom istom mesiaci?
3. Vyťažené letisko koordinovalo v priebehu 24 hodín 1 560 odletov a príletov. Riadiaca veža nahlásila, že v priebehu jednej minúty museli naviesť dve lietadlá. Ako sa o tom hlavný dispečer presvedčí?
4. V rovine je daných 5 bodov, pričom žiadne tri neležia na tej istej priamke. Potom štyri z nich tvoria vrcholy konvexného štvoruholníka.

To sú príklady *existenčných* úloh. Ich riešenie môžeme zhrnúť asi takto:

$$8 > 2, \quad 13 > 12, \quad 24 \cdot 60 > 1\,560, \quad 3 > 2$$

Takýto spôsob uvažovania je aplikáciou tvrdenia

Dirichletov princíp. Predpokladajme, že sme aspoň $n+1$ guličiek rozdelili do n krabičiek, $n > 0$. Potom v niektorej krabičke sú aspoň dve guličky. [1]

Náš najbližší program: Predstavíme úlohy na bezprostredné využitie Dirichletovho princípu, a postupne prejdeme ku pokročilejším aplikáciám.

Pokračovanie nabudúce :)

[1] Princíp je pomenovaný podľa nemeckého matematika P. Dirichleta(1805 –1859). Dirichletove výsledky, prevažne z teórie čísel, ukazujú že dômyselná interpretácia jednoduchého faktu môže viesť k zaujímavým tvrdeniam. Ku najznámejšími, ktoré nájdete prakticky v každej učebnici teórie čísel, patrí napríklad Dirichletova veta o súčte dvoch štvorcov.