Existencia - Dirichletov princíp

• čomu sa budeme venovať: **existenčné tvrdenia**, ktorých riešenie je založené na **Dirichletovom princípe**

• náš program:

- predstavíme sériu príkladov **na bezprostredné využitie** Dirichletovho princípu,

- uvedieme dve **pokročilejšie aplikácie**: dôkaz Erdös-Szekeresovej vety o existencii monotónnej podpostupnosti predpísanej dĺžky v dostatočne dlhej postupnosti čísel a dôkaz Diracovej vety o existencii okružnej prechádzky mestom.

- spoločným menovateľom úloh s ktorými sa zoznámime je potvrdenie existencie špecifického podsystému v dostatočne veľkom, náhodne zvolenom systéme.

Tri na zahriatie:

1. Vo vrecku je osem guličiek, každá je modrá, alebo je červená. Koľko guličiek treba nabrať aby sme si mohli byť istí že v hrsti máme aspoň dve guličky rovnakej farby?
2. Sme trinásti. Nájdu sa medzi nami dvaja narodení v tom istom mesiaci?
3. Vyťažené letisko koordinovalo v priebehu 24 hodín 1 560 odletov a príletov. Riadiaca veža nahlásila, že v priebehu jednej minúty museli naviesť dve lietadlá. Ako sa o tom hlavný dispečer presvedčí?

Dirichletov princíp. Predpokladajme, že sme $n+1$ guličiek rozdelili do n krabičiek, $n > 0$. Potom v niektorej krabičke sú aspoň dve guličky.

Ako by to dopadlo keby sme namiesto $n+1$ guličiek rozdelíme n guličiek?

Úloha 1. Koľko celých čísel medzi 1 až 20 treba zvoliť aby sme si mohli byť istí, že sa medzi nimi nájdu dve nesúdelitelné čísla?

Úloha 1. neformálne: Desať manželských párov sa ubytovalo na chate na Popradskom plese a ráno jedenásti z týchto dvadsiatich nastúpili na výlet po trase Ostrvá, Batizovské pleso, Sliezsky dom, Hrebienok a späť. Nájde sa medzi výletníkmi aspoň jeden manželský pár?

Úloha 2. Koľko celých čísel medzi 1 až 20 treba zvoliť aby sme si mohli byť istí, že sa medzi nimi nájdu dve také, že ich súčet je 21?

Úloha 3. Koľko celých čísel medzi 1 až 20 treba zvoliť aby sme si mohli byť istí, že sa medzi nimi nájdu dve také, že jedno delí druhé?

• guličky a krabičky všeobecnejšie:

1. Vo vrecku je dvanásť guličiek, každá je modrá, alebo je červená. Koľko guličiek treba nabrať aby sme si mohli byť istí, že v hrsti máme aspoň tri guličky rovnakej farby?
2. V triede je 40 študentov. Potom aspoň traja z nich sú narodení v tom istom mesiaci.

3. V knižnici je 1000 kníh, žiadne nemá viac ako 80 strán. Potom aspoň 13 z nich má rovnaký počet strán.

Dirichletov princíp všeobecnejšie. Predpokladajme, že sme $m \cdot n + 1$ guličiek rozdelili do n krabičiek, $n > 0$. Potom v niektorej krabičke je aspoň $m + 1$ guličiek.

Úloha 4. Dvaja hráči, Modrý a Červený hrajú hru. Jeden nakreslí na papier 6 bodov, pričom žiadne tri z nich neležia na priamke (napríklad vrcholy pravidelného šesťuholníka). Potom hráči striedavo spájajú dvojice bodov (dosiaľ nespojených), každý svojou farbou. Prehrá ten hráč, ktorý prvý nakreslí jednofarebný trojuholník (s vrcholmi v daných bodoch). Môže sa hra skončiť remízou? Ako by to dopadlo keby hra prebiehala na piatich bodoch? A ako keby sme mali viac ako šesť bodov?

Problém 1. Koľko rôznych celých čísel treba napísať do riadku, aby sme si mohli byť istí, že pri čítaní zľava doprava nájdeme štyri čísla napísané od najmenšieho po najväčšie, alebo štyri také, ktoré sú napísané od najväčšieho po najmenšie?

Experiment nám hovorí, že osem čísel nestačí, a ani deväť nestačí. Nech skúšame akékoľvek postupnosti desiatich čísel, vždy požadovanú podpostupnosť nájdeme. Tak napríklad, postupnosť $3, 0, -5, 4, 1, 2, 12, 8, 6$ obsahuje rastúcu podpostupnosť $0, 1, 2, 12$.

Správna odpoveď, v akademickejšej podobe, je tvrdenie „Každá postupnosť desiatich rôznych celých čísel obsahuje rastúcu, alebo obsahuje klesajúcu podpostupnosť dĺžky štyri.“

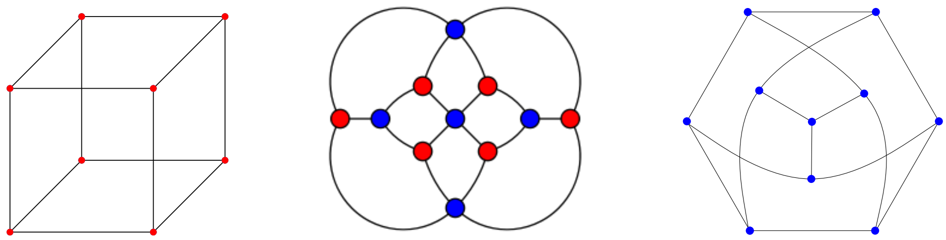
Veta 1(Erdös-Szekeres, 1935) Každá postupnosť $n^2 + 1$ navzájom rôznych čísel obsahuje rastúca podpostupnosť $n+1$ čísel, alebo obsahuje klesajúcu podpostupnosť $n + 1$ čísel. Výsledok je najlepší možný, t.j. tvrdenie neplatí ak v predpoklade zameníme $n^2 + 1$ rôznych čísel s n^2 rôznych čísel

Dôkaz. Sledujeme dôkaz z podkladu Kombinatorika.

Problém 2. Nájde sa okružná prechádzka mestom Kocka?
To je úloha (podobne pre mestá na obrázku nižšie) ktorú sme riešili v úvodnej prednáške, keď sme diskutovali konštruktívne riešenie existenčných úloh. Matematickým prostriedkom pre uchopenie tejto úlohy je pojem *graf.*

- Graf G je usporiadaná dvojica (V, E), kde $V \neq \emptyset$ je konečná množina a $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$. Prvky množiny V nazývame *vrcholy* grafu G, prvky množiny E nazývame *hrany* grafu G.

Špeciálne, grafom budeme rozumieť *cestnú sieť.* Križovatky korešpondujú s vrcholmi grafu, a priame spojenie dvoch križovatiek korešponduje s hranou grafu. Tak napríklad kocka je grafom cestnej siete, v ktorej križovatky odpovedajú vrcholom kocky a hrana kocky reprezentuje priame spojenie odpovedajúcich dvoch križovatiek.
Grafy môžeme znázorniť kreslením do roviny. Vrcholom grafu odpovedajú body roviny, tie je zvykom kresliť ako "tučné" bodky, a hrany sa znázornia spojením príslušných dvojíc bodov. Tak vznikajú obrázky ako napríklad domček a kocka.



Obr. 1: mesto Kocka, mesto Herschel a mesto Petersen

Veta 2 (A. Dirac, 1952) Graf na $n \geq 3$ vrcholoch a minimálnym stupňon $\delta \geq n/2$ je hamiltonovský.

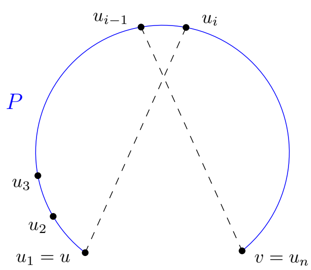
Dôkaz. Kompletný graf K_2 nie je hamiltonovský a každý vrchol má stupeň 1. Preto je podmienka $n \geq 3$ potrebná. Ďalej postupujme nepriamo. Nech G vyhovuje predpokladom vety a nie je hamiltonovský. Preto nie je kompletý a tak má aspoň dva nesusedné vrcholy.

G vnoríme do *maximálneho* nehamiltonovského grafu $G^\star$: zvolíme nehranu $e = uv \notin G$.

- Ak $G + e$ je hamiltonovský, hranu e vymažeme.
- Ak $G + e$ nie je hamiltonovský, hranu e ponecháme.
- Iterujeme.

Po konečnom počte krokov prídeme ku grafu, pomenujme ho $G^\star$ s $\delta \geq n/2$, ktorý nie je hamiltonovský a pridanie ľubovoľnej hrany uv, u a v nie sú susedné, spôsobí vznik hamiltonovskej kružnice. Preto $G^\star$ obsahuje hamiltonovskú cestu P z u do v.

Ukážeme, že existuje také i, že $\{u_1, u_i\}$ a $\{u_n, u_{i-1}\}$ sú hrany v $G^\star$.



Obr. 2: hamiltonovská cesta P v $G^\star$ a hrany $\{u_1, u_i\}$, $\{u_n, u_{i-1}\}$

Potom $u_1, u_2, \ldots u_{i-1}, u_n, u_{n-1}, \ldots, u_i, u_1$ je Hamiltonovská kružnica v $G^\star$, čo je spor s tým, že $G^\star$ takúto kružnicu neobsahuje.

Rozdelme všetky možné hrany idúce z u_1, u_n do skupín

$$\{(u_1, u_2)\}, \{(u_1, u_3), (u_2, u_n)\}, \ldots, \{(u_1, u_i), (u_{i-1}, u_n)\}, \ldots, \{(u_1, u_{n-1}), (u_{n-2}, u_n)\}, \{(u_{n-1}, u_n)\}$$

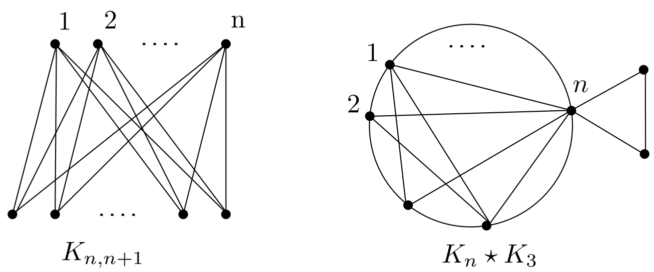
Z každého vrchola grafu $G^\star$ vychádza aspoň $n/2$ hrán a u_1, u_n nie sú spojené hranou. Preto celkovo z u_1, u_n vychádza aspoň n hrán. Keďže skupín hrán je

$n-1 < n$, tak podla Dirichletovho princípu v niektorej skupine sú dve hrany grafu $G^\star$. Tým je existencia hrán $\{u_1, u_i\}$ a $\{u_n, u_{i-1}\}$ je potvrdená. $\square$

Všimnime si, že podmienka $\delta \geq n/2$ je len k tomu, aby súčet stupňov každej dvojice nesusených vrcholov bol aspoň n. Vtedy ani nepotrebujeme vnorenie do maximálneho nehamiltonovského grafu. Stačí uvážiť najdlhšiu cestu P medzi nesusednými vrcholmi u a v, a P modifikovať na kružnicu v G na tej istej množine vrcholov ako P. Z voľby P potom vyplynie, že zkonštruovaná kružnica je hamiltonovská.

Veta 3 (Ore, 1960) Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholoch. Ak $\deg u + \deg v \geq n$ pre každú dvojicu nesusedných vrcholov, tak G má hamiltonovskú kružnicu.

Kompletný bipartitný graf $K_{n,n+1}$ a graf $K_n \star K_3$ ukazujú, že predstavené podmienky nie je možné zoslabiť.



Obr. 3: $K_{n,n+1}$ a $K_n \star K_3$: Podmienku Diracovej ani Oreho vety nie je možné zoslabiť