Matematická indukcia

1. Určte súčet prvých n nepárnych kladných celých čísel.
2. Dokážte, že 3 delí $2^{2n} - 1$ vždy keď n je celé kladné číslo.
3. Dokážte, že pre každé reálne číslo $h > 0$ a celé číslo $n \geq 2$ platí $(1 + h)^n > 1 + n \cdot h$.
4. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
5. Majme $n \geq 1$ priamok v rovine. Aký je najmenší počet farieb ktorými možno ofarbiť časti roviny určené týmito priamkami tak, aby susedné časti mali rôznu farbu?(Dve časti roviny považujeme za susedné ak sú oddelené priamkou, alebo polpriamkou, alebo úsečkou.)
6. V krajine Indukcia je $n \geq 2$ miest, pričom každé dve mestá sú spojené jednosmernou cestou. Nájde sa prechádzka, ktorá začína v jednom meste, končí v inom meste a navštívi každé mesto presne raz? Napríklad pre tri mestá, pomenujme ich A, B, C a spojenie $A \to B$, $A \to C$ a $B \to C$, je $A \to B \to C$ takou prechádzkou.
7. Majme tabuľku čokolády s $m \times k$ štvorčekmi. Postupne ju budeme lámať na kúsky nasledujúcim spôsobom: v každom kroku si zvolíme kúsok ktorý má aspoň dva štvorčeky a rozlomíme ho podľa vodorovnej alebo zvislej linajky (linajky tvoria štvorčekovú mozaiku čokolády). Skončíme keď je čokoláda polámaná na štvorčeky. Ako dlho nám bude trvať kým čokoládu polámeme? Hint: dôležitý je len počet štvorčekov čokolády, tvrdenie preto stačí dokázať pre čokoládu ktorá má n štvorčekov. Aplikujte matematickú indukciu, potom skúste argument ktorý indukciu nepoužíva.
8. Aký najväčší počet kúskov pizze môžeme dostať keď rez nožom vždy vedieme priamočiaro? Akademickejšie: Aký je najväčší počet $f(n)$ častí roviny, ktoré sú určené n priamkami v rovine? Hint: preskúmajte malé $n = 1, 2, 3$, všimnite si v akej vzájomnej sú priamky v prípade keď sa dosahuje maximum, vyslovte hypotézu a následne ju dokážte.
9. V tenisovom turnaji hrajú každí dvaja hráči proti sebe presne raz. Keď sa turnaj skončí, každý hráč si napíše na zoznam mená hráčov ktorých porazil a tiež tých, ktorí boli porazení niektorým hráčom ktorého on sám porazil. Indukciou ukážte, že aspoň jeden hráč má na zozname meno každého iného hráča. Potom skúste argument ktorý indukciu nepoužíva.
10. Pozorne prečítajte dôkaz nasledujúceho tvrdenia indukciou: Máme n priamok v rovine, pričom žiadne dve nie sú rovnobežné. Potom všetky tieto priamky prechádzajú cez ten istý bod. Dôkaz: Pre $n = 1; 2$ tvrdenie platí. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n priamok a uvažujme množinu $S = \{a, b, c, d, \dots\}$, $n+1$ priamok. Zmažme priamku c. Dostaneme množinu $S' = \{a, b, d, \dots\}$, n priamok. Žiadne dve z nich nie sú rovnobežné preto, podľa indukčného predpokladu, všetky prechádzajú bodom P. Vráťme priamku c a zmažme priamku d. Dostaneme množinu $S'' = \{a, b, c, \dots\}$, n priamok, žiadne dve nie sú rovnobežné. Opäť podľa indukčného predpokladu, všetky prechádzajú bodom P'. Priamky a, b patria do množiny S' a tiež do S'', preto $P = P'$ a tak c prechádza cez P; zvyšné priamky tiež prechádzajú cez P podľa voľby bodu P. Takže všetky priamky prechádzajú cez bod P. Hm, lenže tvrdenie neplatí. Kde v dôkaze je chyba?
11. Pozorne prečítajte dôkaz nasledujúceho tvrdenia indukciou: "Všetky kone majú tú istú farbu." Keďže na svete je konečný počet koní, tvrdenie môžeme vysloviť takto: Pre každé kladné celé číslo n, každých n koní má tú istú farbu. Tu je dôkaz: Pre $n = 1$ tvrdenie platí, lebo jeden kôň má tú istú farbu ako je tá jeho. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n koní, ukážeme že platí pre $n + 1$ koní. Vezmime $n + 1$ koní a zoraďme ich do radu. Prvých n koní má tú istú farbu, povedzme čiernu, podľa indukčného predpokladu. Posledných n koní musí mať tiež tú istú farbu, opäť podľa indukčného predpokladu. Takže všetkých $n + 1$ koní je čiernych, lebo prvých n koní je čiernych, ako sme videli, a medzi nimi je druhý, tretí, . . ., n-tý kôň a tieto sú medzi poslednými n koňmi. Takto sme ukázali, že všetky kone na svete majú tú istú farbu. Hm, lenže tvrdenie neplatí. Kde v dôkaze je chyba?
12. Fermatove číslo F_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, je definované predpisom $F_n = 2^{2^n} + 1$. Napríklad, $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537, F_5 = 641 \cdot 6700417$. Dokážte platnosť nasledujúcej rovnosti
$$F_0 \cdot F_1 \cdot \cdots \cdot F_{n-1} = F_n - 2, \ n \geq 1.$$
Pomocou predchádzajúceho ukážte, že ľubovoľné dve Fermatove čísla sú nesúdeliteľné. Odtiaľ, spolu s faktom že Fermatových čísel je nekonečne veľa odvoďte, že prvočísel je nekonečne veľa.