Kombinatorické princípy, súhrnné cvičenie

1. Na poličke je 12 kníh. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 5 z nich? A koľkými tak aby žiadne dve ktoré sme vybrali nestáli na poličke vedľa seba? Návod pre druhú otázku: uvažujte obrátený postup, t. j. knihy vkladajte na poličku.

2. Za okrúhlym stolom sedí 12 rytierov a vzťahy medzi nimi sú zložité - každý z nich sedí medzi svojimi nepriateľmi (iných nepriateľov za okrúhlym stolom nemá). Koľkými spôsobmi je možné vybrať 5 rytierov ktorí pôjdu zachrániť princeznú, keď medzi vybranými rytiermi nesmú byť žiadni dvaja znepriatelení? Návod: Zvolte jedného z rytierov a uvažujte prípad keď je vybraný a potom prípad keď nie je vybraný.

3. Koľkými spôsobmi je možné dať 20 rôznych kníh do knihovničky v ktorej je päť políc, keď vieme, že všetky knihy sa vojdú do každej z políc? Na poradí v akom sú knihy na polici záleží.

4. Uvažujme slová v abecede 0, 1, ktoré majú m jednotiek a n núl. Určte počet slov, ktoré obsahujú presne k bežcov.(Bežcom rozumieme maximálny reťazec po sebe idúcich jednotiek. Napr. slovo 1011100111110 má troch bežcov.)

5. Koľkými spôsobmi je možné postaviť na šachovnicu 8 bielych veží tak, aby sa žiadne dve veže neohrozovali? Ako by to dopadlo keby sme mali osem navzájom rôznych veží? A ako pre 3 modré, 2 červené a 3 zelené veže? (Dve veže sa ohrozujú ak sú v tom istom riadku, resp. v tom istom stĺpci šachovnice.)

6. Koľkými spôsobmi je možné postaviť do radu 6 Angličanov, 7 Francúzov a 10 Turkov tak, aby každý Angličan stál medzi Francúzom a Turkom a žiadny Francúz nestál vedľa Turka?

7. Študent medicíny potrebuje praxovať v nemocnici 5 dní v januári, pričom nie je povolené praxovať dva po sebe idúce dni. Koľkými spôsobmi si môže zvoliť rozvrh praxe? Návod: Situáciu preveďte na známy prípad keď dni môžu byť po sebe idúce.

8. Predpokladajme, že výsledkom losovania je päť čísel, každé medzi 1 a 90. Losovanie prebieha tak, že vždy keď je vylosovaný balónik s číslom, tak balónik sa vráti späť do losovacieho bubna. Vyhráva ten hráč, ktorý uhádol všetkých päť čísel (na poradí v akom boli čísla vylosované nezáleží). Koľko tiketov si musíme kúpiť aby sme si mohli byť istí že vyhráme jackpot?

9. Študent fyziky pracuje v laboratóriu päť dní počas posledného semestra jeho štúdia. Po každom dni v laboratóriu, analyzuje v pracovni aspoň šesť dní páve získané dáta kým sa opäť vráti do laboratória. Po poslednom dni v laboratóriu potrebuje desať dní na kompletizáciu správy o svojom výskume, ktorú predloží na konci posledného dňa semestra svojmu školiteľovi. Koľkými spôsobmi môže študent toto všetko realizovať ak predpokladáme, že semester má 105 dní?

10. Je dané prirodzené číslo $n > 2$ a množina M, ktorej prvkami sú slová dĺžky n v abecede $\{X, Y\}$ a akékoľvek dve rôzne slová sa líšia aspoň na troch miestach. Dokážte nerovnosť

$$|M| \leq \frac{2^n}{n+1}.$$

Hint: Položme $|M| = m$ a pre $1 \leq i \leq m$ nech M_i je množina slov, ktoré vzniknú z i-teho slova množiny M zámenou jediného písmena. Ukážte, že množiny M_i a M_j, $i \neq j$, sú disjunktné a $|M_i| = n+1$ pre všetky i. Využite, že zjednotenie množín M_i je podmnožina množiny všetkých slov dĺžky n v abecede $\{X, Y\}$.

11. Uvažujme všetky slová dĺžky n v abecede, ktorá pozostáva z k písmen. Dve slová považujeme za rovnaké, ak pri čítaní jedného slova zprava doľava dostaneme druhé slovo. Napríklad v abecede $\{K, A, T, \star, \bullet\}$ pre $n = 4$ slová KATA a ATAK považujeme za rovnaké, podobne slovo A $\star$ A $\bullet$ a slovo $\bullet$ A $\star$ A nepovažujeme za rôzne. Koľko rôznych slov máme?