Cvičenie 5, kombinatorické identity

1. Kombinatorickou úvahou dokážte:
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$
Potom dokážte:
$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m\binom{n}{m}.$$
Hint: uvažujte m členné výbory z n študentov, z ktorých každý má k členný podvýbor.

2. Dokážte kombinatorickou úvahou a tiež pomocou binomickej vety:
$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=o}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j} \quad \text{kde } m, n \geq 0.$$
Hint: analogická úvaha ako sme mali prednáške pri súčte štvorcov binomických koeficientov v riadku Pascalovho trojuholníka.

3. Dokážte:
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$
Hint: Využite vzťah $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ a tiež vzťah $(1-1)^{n+1} = 0$.

4. Dokážte:
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$
Hint: Postupujte matematickou indukciou vzhľadom na n a využite predchádzajúcu identitu.

5. Nech n, m sú prirodzené čísla, $m \leq n$. Vyjadrite vzorcom bez použitia sumy:

   a) $\sum\limits_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}$

   Hint: všeobecný člen upravte na tvar $\binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}$.

   b) $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{k}{m}\frac{1}{k}$

   Hint: všeovecný člen upravte na tvar $\frac{1}{m}\binom{k-1}{m-1}$.

6. Príklad 12 z cvičenia 2 riešte pomocou binomickej vety.

7. Koľko slov (aj nezmyselných) možno utvoriť permutáciou písmen slova ABRAKADABRA ?

8. Aký je koeficient pri b^3d^2 v rozvoji $(a + 2b + 3c + d + e)^5$? A aký v rozvoji $(a - 2b + 3c + d + e)^5$?

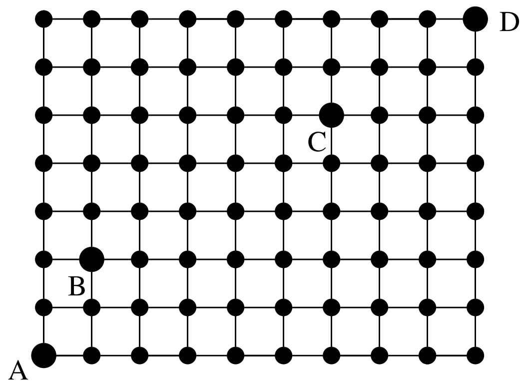
9. Dokážte, algebraickou úpravou a tiež kombinatorickou úvahou nasledujúce zovšeobecnenie Pascalovej formuly. Označme výraz $\frac{n!}{l_1!l_2!\ldots l_k!}$ symbolom $\binom{n}{l_1,l_2,\ldots,l_k}$ a predpokladajme, že $l_i \geq 1, i = 1, 2, \ldots, k$. Platí
$$\binom{n}{l_1,l_2,\ldots,l_k} = \binom{n-1}{l_1-1,l_2,\ldots,l_k} + \binom{n-1}{l_1,l_2-1,l_3,\ldots,l_k} + \cdots + \binom{n-1}{l_1,\ldots,l_{k-1},l_k-1} \tag{1}$$
.

10. Na nasledujúcom obrázku je schematický plán mesta:

    a) Koľko existuje rôznych ciest z vrchola A do vrchola D, ak cesta nesmie viesť zhora nadol ani sprava doľava?
    b)Koľko z nich prechádza vrcholom C?
    c)Koľko z nich neprechádza vrcholom B?

11. Pomocou cestovania v mriežke dokážte

    a) $\binom{a+b-1}{a} + \binom{a+b-1}{a-1} = \binom{a+b}{a}$ $(a, b > 0)$;



b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;

c) $\sum_{k=o}^{s} \binom{s}{k}\binom{a+b-s}{a-k} = \binom{a+b}{a}$, $(b \geq a \geq s)$.

Hint: každá cesta prechádza cez presne jeden z bodov $(0, s), (1, s-1), \ldots, (s, 0)$;

d) $\sum_{k=o}^{n-m} \binom{s+k}{k}\binom{n-k}{m} = \binom{s+n+1}{s+m+1}$ $(s, m, n > 1)$.

Hint: Pre $n < m$ tvrdenie platí. Nech teda $n \geq m$. Pravá strana vyjadruje počet ciest z $(0, 0)$ do $(s+m+1, n-m)$. Pre $k = 0, 1, \ldots, n-m$ určte počet ciest ktoré prechádzajú bodom (s, k) a ďalej pokračjú do $(s+1, k)$.

12. Koľko existuje takých ciest z bodu $(0, 0)$ do bodu (n, n) v mriežke, že žiadna nejde nad diagonálu, ale môže sa diagonály dotýkať? Cestujeme štandardne s krokom $(1, 0)$, alebo $(1, 0)$, diagonála pozostáva z bodov (k, k), $k = 1, \ldots, n$.

    Ako súvisí táto úloha s nasledujúcou: Koľko je postupností $a_1, \ldots, a_{2n}$ ktoré obsahujú číslo 1 n-krát a číslo -1 n-krát a naviac vyhovujú rovnici $a_1 + \cdots + a_k \geq 0$ pre $k = 1, 2, \ldots 2n$? Skúste nejakú ďalšiu interpretáciu.

13. Určte počet všetkých takých dvojíc A, B podmožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, že jedna je podmnožinou druhej (t.j. $A \subseteq B$, alebo $B \subseteq A$. Riešte kombinatorickou úvahou a tiež pomocou binomickej vety.