Holubníkový princíp

1. Na šachovnici sú vyrezané dva koncové rohy hlavnej diagonály. Je možné šachovnicu pokryť dominom tak, aby každé domino pokrývalo presne dve polia a žiadne dve dominá sa neprekrývali?

2. Na pomaranči je vyznačených päť bodov. Je možné prekrojiť pomaranč tak, aby štyri z vyznačných bodov ležali na tej istej "pologuli"? (Predpokladáme, že vyznačený bod ktorým prechádza rez patrí obom častiam pomaranča.)

3. V každej spoločnosti aspoň dvoch ľudí sa nájdu dvaja s rovnakým počtom známych (v tejto spoločnosti). (Predpokladáme, že ak "Jano pozná Miša", tak "Mišo pozná Jana" a nikto nie je "známy" sám sebe.)

4. Dvaja hráči, Modrý a Červený hrajú hru. Jeden nakreslí 10 bodov na papieri tak, aby žiadne tri neležali na tej istej priamke(napríklad vrcholy pravidelného 10 uholníka). Potom striedavo spájajú dvojice bodov, každý svojou farbou. Modrý prehrá ak nakreslí trojuholník a Červený prehrá ak navzájom pospája štyri z vyznačených bodov. Ukážte, že hra nemôže skončiť remízou. Dôkaz pozorne prejdite a ukážte, že ani na 9 bodoch nenastane remíza. Potom nájdite príklad hry na 8 vrcholoch s remízou.

5. Hru dvoch hráčov zovšeobecníme pre troch hráčov.Traja hráči, Modrý, Červený a Biely hrajú hru. Jeden nakreslí 17 bodov na papier tak, aby žiadne tri neležali na tej istej priamke(napríklad vrcholy pravidelného 17 uholníka). Potom striedavo spájajú dvojice bodov, každý svojou farbou. Prehrá ten hráč, ktorý prvý nakreslí jednofarebný trojuholník. Ukážte, že táto hra neskončí remízou. Ako by to dopadlo keby sme číslo 17 nahradili číslom 16?

6. Do skúšky vám zostáva 37 dní. Viete, že stačí ak budete študovať 60 hodín (čistého času). Aby toho nezostalo veľa na poslednú chvíľu, rozhodli ste sa študovať aspoň 1 hodinu denne. Dokážte, že nech zvolíte akýkoľvek postup pre štúdium v rámci týchto pravidiel, nájde sa taká postupnosť po sebe idúcich dní, že počas nich budete študovať spolu presne 13 hodín. Predpokladáme, že dĺžka štúdia v jeden deň je daná v celých hodinách. Hint: Konzultujte skripta M. Knor, Priklad 3, kapitola Slabá forma Dirichletovho princípu.)

7. Vojaci pochodujú v m radoch, pričom v každom rade je n vojakov. V každom rade sú zoradení zľava do prava od najnižsieho po najvyššieho. Veliteľ sa rozhodol, že chce takto usporiadať aj zástupy tak, že každý zástup preusporiada. (Teda zloženie zástupov sa nezmení, zmení sa v nich len poradie.) Keď skončí, tak je každý zástup zoradený spredu dozadu od najnižsieho po najvyššieho. Dokážte, že rady si zachovajú svoj "rastúci" charakter zľava do prava.

8. Dokážte, že ak z množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ vyberieme $n + 1$ čísel, tak sa medzi nimi nájdu dve, ktorých rozdiel je 1. Ako by to dopadlo keby sme vybrali n čísel?

9. Dokážte, že ak z množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ vyberieme $n + 1$ čísel, tak sa medzi nimi nájdu dve také, že jedno delí druhé.Ako by to dopadlo keby sme vybrali n čísel?